

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1955

SPIS TREŚCI

	Str.
J. Lenkowski: Zakres możliwości realizacji wąskopasmowego filtra o 3 obwodach sprzężonych	401
Cz. Rajski: Transformatorowa realizacja różnicy symetrycznej	419
R. Kulikowski: Minimalne zniekształcenia i energia szumów w filtrach środkowoprzepustowych	425
R. Kulikowski, J. Plebański: Minimalne zniekształcenia sygnału stochastycznego w układach o małym poziomie szumów	435
T. Cholewicki: Metody oczkowe i węzłowe w macierzach składowych symetrycznych	449
Komunikaty z prac Zakładu Elektroniki I. P. P. T. P. A. N.	493

СОДЕРЖАНИЕ

Я. Ленковски: Условия осуществимости узкополосового фильтра с тремя резонансными контурами	416
Ч. Райски: Трансформаторное исполнение симметрической разницы	424
Р. Куликовски: Минимальные искажения и энергия шумов в полосовых фильтрах	432
Р. Куликовски и Г. Плебански: Минимальные искажения стохастического сигнала в системах с небольшим уровнем шумов	446
Т. Холевички: Контурные и узловые методы в матрицах симметрических составляющих	487
Сообщения	493

CONTENTS — SOMMAIRE

J. Lenkowski: Quality factors of physically realizable narrow-band filter with three coupled circuits	417
Cz. Rajski: A simple half-adder	424
R. Kulikowski: Minimum disturbance and noise energy in bandpass filters	433
R. Kulikowski, J. Plebański: Minimum stochastic signal distortions in low noise level circuit	447
T. Cholewicki: Mesh and node-pair methods in matrices of symmetrical components	489
Communiqués	493

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM IV • ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI:

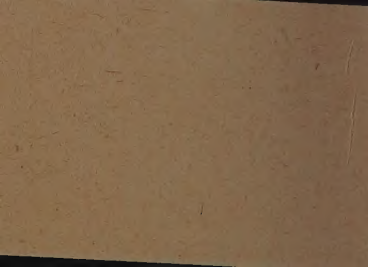
Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 1289+103 egz.	Do składania 10. VI. 1955
Ark. wyd. 8,7 druk. 6,75	Podpisano do druku 20. IX. 1955
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono we wrześniu 1955
Cena zł 15.—	K-6-1041. - Zamówienie 282/119

POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10

W przypadku ujawnienia w egzemplarzu błędu
pochodzącego z winy drukarni, uniemożliwiają-
cego użytkowanie książki zgodnie z jej
znaczeniem, nabywca ma prawo wymie-
nić egzemplarz w księgarniach „Domu
Książki” niezależnie od czasu i miejsca za-
kupu. W przypadku braku odpowiedniego
egzemplarza wymiennego księgarnia obo-
wiązana jest zwrócić nabywcy wartość
książki według ceny katalogowej.



621.392.52

J. LENKOWSKI

Zakres możliwości realizacji wąskopasmowego filtra o 3 obwodach sprzężonych

Rękopis dostarczono 1. 10. 1954

Dla uzyskania krzywych przepuszczania kształtu maksymalnie płaskiego lub równofalistego dla filtrów o trzech obwodach sprzężonych muszą być spełnione pewne warunki wyrażone trzema równaniami, wiążącymi między sobą dobrocie obwodów i współczynniki sprzężeń, z szerokością względną pasma przepuszczania i falistością wewnątrz tego pasma.

Nie wszystkie, dowolnie wybrane dobrocie obwodów jak też współczynniki sprzężeń spełniają te warunki.

W artykule poddano ścisłej analizie, jakie dobrocie pozwalają na realizację krzywych przepuszczania maksymalnie płaskich względnie równofalistych. Analiza ta jest przeprowadzona dla przypadków dwu różnych jak też różnych współczynników sprzężeń. Rozważania teoretyczne są ilustrowane na zakończenie przykładami obliczeń.

1. WSTĘP

Ze względu na nieliniowe charakterystyki lamp pożądane jest osiągnięcie określonego stopnia selekcji już we wstępnych stopniach odbiornika. Do tego celu na ogół nie wystarczają filtry dwuobwodowe.

Zagadnienie wąskopasmowego filtra 3-obwodowego ma w chwili obecnej już sporą ilość pozycji bibliograficznych [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], mimo to żadna z nich nie poddaje ścisłej analizie zakresu ważności rozważań.

Praca niniejsza jest próbą definicji zakresu wielkości charakterystycznych parametrów obwodów, związanego z fizyczną możliwością realizacji filtra. Rozważano jedynie aproksymację idealnego przebiegu tłumienia roboczego o kształcie prostokątnym za pomocą wielomianu Czebyszewa z granicznym przypadkiem krzywej maksymalnie płaskiej. Przebieg tłumienia w ten sposób aproksymujący prostokąt będziemy nazywali w dalszym ciągu *równofalistym* bądź *maksymalnie płaskim*.

2. USTALENIE WARUNKÓW NA RÓWNOFALISTY PRZEBIEG TŁUMIENIA

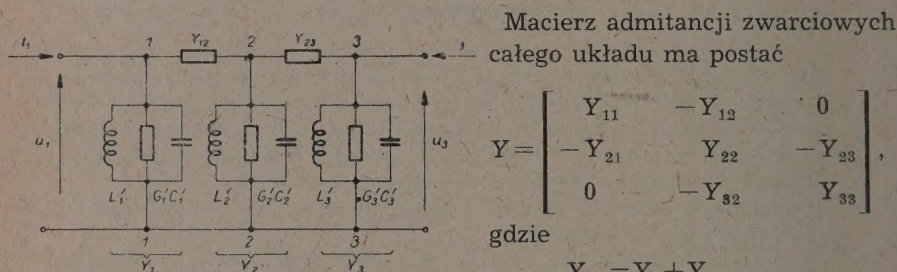
2.1. Określenie funkcji przenoszenia

Rozważmy filtr o 3 obwodach Y_1, Y_2, Y_3 sprzężonych za pomocą admittancji wzajemnych Y_{12} i Y_{23} . Admittancje wzajemne mają kształt

$$Y_{mn} = j\omega C_{mn} + G_{mn} + \frac{1}{j\omega L_{mn}},$$

admittancje zaś własne

$$Y_l = j\omega C'_l + \frac{1}{j\omega L'_l} + G'_l, \quad l = 1, 2, 3.$$



Rys. 1. Filtr o 3 obwodach sprzężonych za pomocą admittancji wzajemnych.

$$Y_{11} = Y_1 + Y_{12},$$

$$Y_{22} = Y_{12} + Y_2 + Y_{23},$$

$$Y_{33} = Y_{23} + Y_3$$

sa uzyskane przy zwarcu obu pozostałych węzłów, prócz rozważanego. Ze względu na bilateralność układu $Y_{12} = Y_{21}$ oraz $Y_{32} = Y_{23}$.

Stosując transformację częstotliwości z układu środkowo-przepustowego na dolnoprzepustowy do elementów przekątnej głównej macierzy, inne zaś elementy uważając za praktycznie stałe w granicach zmian częstotliwości nas interesujących¹, otrzymamy

¹ Przyjęcie stałości Y_{mn} w paśmie rozważanych częstotliwości jest przybliżeniem świadomie dopuszczonym ze względu na to, że filtr jest wąskopasmowy, rezonans zaś Y_{mn} jest daleki od częstotliwości rozważanych. Podobnie również dokonanie transformacji częstotliwości nad Y_{11}, Y_{22}, Y_{33} wymaga przyjęcia przybliżenia

$$G_{ll} = \frac{d_{L_l}}{L_l} + d_{C_l} \omega C_l \approx \omega_l C_l (d_{L_l} + d_{C_l}) = \omega_l C_l \cdot d_l,$$

gdzie d_{L_l} — współczynnik stratności cewki L_l obwodu l ,

d_{C_l} — współczynnik stratności kondensatora C_l obwodu l .

Trzecim przybliżeniem jest uproszczenie wyrażenia Ω_l do postaci

$$\Omega_l \approx \frac{2(\omega - \omega_l)}{\omega_l}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \omega_1 C_1 (d_1 + j\Omega_1) & -Y_{12} & 0 \\ -Y_{21} & \omega_2 C_2 (d_2 + j\Omega_2) & -Y_{23} \\ 0 & -Y_{32} & \omega_3 C_3 (d_3 + j\Omega_3) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$d_l = \frac{G_l}{\omega_l C_l}, \quad \omega_l = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}},$$

$$\Omega_l = \frac{\omega}{\omega_l} - \frac{\omega_l}{\omega} \approx \frac{2(\omega - \omega_l)}{\omega_l}, \quad l = 1, 2, 3$$

natomiast G_l , C_l i L_l wynikają z definicji Y_{11} , Y_{22} i Y_{33} .

Wyznacznik macierzy filtra można napisać jako

$$\text{Det } \mathbf{Y} = \omega_1 C_1 \omega_2 C_2 \omega_3 C_3 \begin{vmatrix} d_1 + j\Omega_1 & -j \frac{Y_{12}}{j\sqrt{\omega_1 C_1 \omega_2 C_2}} & 0 \\ -j \frac{Y_{12}}{j\sqrt{\omega_1 C_1 \omega_2 C_2}} & d_2 + j\Omega_2 & -j \frac{Y_{23}}{j\sqrt{\omega_2 C_2 \omega_3 C_3}} \\ 0 & -j \frac{Y_{23}}{j\sqrt{\omega_2 C_2 \omega_3 C_3}} & d_3 + j\Omega_3 \end{vmatrix}.$$

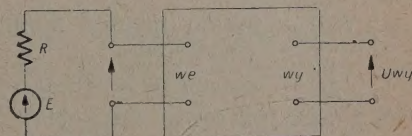
Wprowadzimy tu pojęcie uogólnionego współczynnika sprzężenia indukcyjno-pojemnościowo-przewodnościowego [5]

$$k_{mn} = \frac{Y_{mn}}{j\sqrt{\omega_m C_m \omega_n C_n}}. \quad (1)$$

Wyznacznik można wówczas przepisać jako

$$\text{Det } \mathbf{Y} = \omega_1 C_1 \omega_2 C_2 \omega_3 C_3 \begin{vmatrix} d_1 + j\Omega_1 & -jk_{12} & 0 \\ -jk_{12} & d_2 + j\Omega_2 & -jk_{23} \\ 0 & -jk_{23} & d_3 + j\Omega_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Jeżeli na filtr przedstawiony na rys. 2 załączymy z jednej strony generator o SEM E i oporności wewnętrznej R , końcówki zaś wyjściowe są otwarte (co można przyjąć dla wzmacniaczy lampowych), to robocza stała przenoszenia biegu luzem będzie



Rys. 2. Układ połączenia filtra z generatorem.

$$\Gamma = A + jB = \ln \frac{E}{U_{wy}} \quad \text{lub inaczej} \quad \Gamma = \ln \frac{Z_{11} + R}{Z_{12}},$$

gdzie Z_{11} i Z_{12} są impedancjami biegu luzem filtru. Jeżeli jednak $R \gg |Z_{11}|$, co ma miejsce przy zastosowaniu pentody we wzmacniaczu to

$$\Gamma \approx \ln \frac{R}{Z_{12}}.$$

Normalizując Γ względem poziomu przenoszenia dla środka pasma przepuszczania, otrzymamy

$$\Gamma_{\text{znorm}} \approx \ln \frac{(Z_{12})_0}{Z_{12}} \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},$$

czyli że

$$Z_{12} = \frac{Y_{21}}{\text{Det } Y}$$

otrzymamy ostatecznie uwzględniając przybliżenia omówione w notce 1

$$\Gamma_{\text{znorm}} \approx \ln \frac{\text{Det } Y}{\text{Det } Y_0}. \quad (4)$$

W przypadku analizy wystarczy więc zbadać sam wyznacznik $\text{Det } Y$, w przypadku zaś syntezy — realizacja $\ln(\text{Det } Y)$ różni się od Γ tylko o wielkość stałą.

2.2. Określenie aproksymacyjnej funkcji przenoszenia

Jak wiadomo [2], [3] dla uzyskania równofalistego przebiegu tłumienia roboczego bieguny jego powinny być położone na półeliipsie znajdującej się w lewej półpłaszczyźnie P , gdzie $P = S + j\Omega$, (rys. 3). Półoś duża elipsy d_{sr} jest określona zależnością

$$d_{sr} = \frac{fg_1 - fg_2}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0},$$

gdzie

Δf — pasmo między punktami 3dB poniżej średniego poziomu wierzchołka,

f_0 — częstotliwość środka pasma.

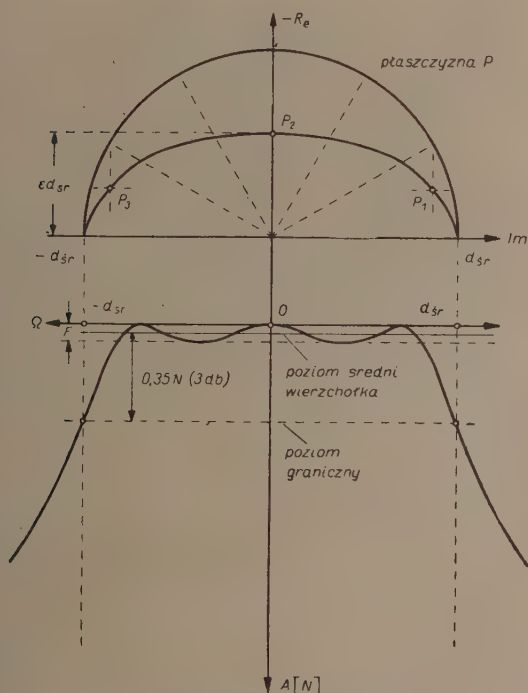
Półoś mała jest równa εd_{sr} , przy czym ε jest mniejsze lub równe 1 i jest określone falistością F wierzchołka krzywej przepuszczania.

W przypadku *maksymalnie płaskim* $\varepsilon = 1$. Między F i ε zachodzi związek

$$\text{tgh} \frac{F}{2} = \left[\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right]^3.$$

Wartości biegunów są następujące

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left(-\frac{\varepsilon}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d_{sr}, \\ P_2 &= -\varepsilon \cdot d_{sr}, \\ P_3 &= \left(-\frac{\varepsilon}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) d_{sr}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Rys. 3. Przebieg tłumienia roboczego.

W celu uzyskania równofalistego przebiegu tłumienia roboczego trzeba teraz, aby zera Det Y (2) miały wartości (5). Będzie to spełnione, gdy tożsamościowo zostanie spełniona równość

$$\begin{vmatrix} d_1 + j\Omega & -jk_{12} & 0 \\ -jk_{12} & d_2 + j\Omega & -jk_{23} \\ 0 & -k_{23} & d_3 + j\Omega \end{vmatrix} \equiv (j\Omega - P_1)(j\Omega - P_2)(j\Omega - P_3).$$

W danym przypadku założono, że $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega$, to znaczy że wszyst-

kie obwody mają wspólną częstotliwość rezonansową (obwody synchroniczne)².

Po rozwinięciu i zrównaniu współczynników jednakowych potęg ($j\Omega$) otrzymamy trzy równania, spełnienie których warunkuje powstanie *równofalistej* (w przypadku zaś granicznym $\varepsilon=1$ *maksymalnie płaskiej*) krzywej tłumienia roboczego³.

$$d_1 d_2 d_3 + k_{12}^2 \cdot d_3 + k_{23}^2 \cdot d_1 = \frac{d_{sr}^2 \varepsilon}{4} \cdot (\varepsilon^2 + 3) = A, \quad (6a)$$

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_3 + k_{12}^2 + k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2}{4} \cdot (3 + 5\varepsilon^2) = B, \quad (6b)$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2\varepsilon \cdot d_{sr} = C. \quad (6c)$$

3. PRZYPADEK RÓŻNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW SPRZĘŻEŃ

Przy danej szerokości względnej pasma przepuszczania d_{sr} i falistości ε należy na podstawie (6) obliczyć nieznanne wartości trzech dobroci obwodów i dwa współczynniki sprzężenia. Z pięciu niewiadomych dwie należy założyć.

Ta swoboda doboru może być pewnym ułatwieniem w projektowaniu filtru (np. ze względu na możliwość realizacji dobroci Q cewek obwodów). Z drugiej strony należy jednak ściśle ustalić granice dopuszczalne tych parametrów ze względu na możliwość realizacji układu.

Rozpatrzmy najpierw przypadek dwóch różnych współczynników sprzężeń

$$k_{12} \neq k_{23}.$$

Z równań (6a) i (6b)

$$k_{12}^2 + k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + 5\varepsilon^2) - d_1 \cdot d_3 - d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_3,$$

$$d_3 k_{12}^2 + d_1 k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2 \varepsilon}{4} \cdot (3 + \varepsilon^2) - d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$

obliczymy kwadraty współczynników sprzężeń dla przypadku $d_1 \neq d_3$.

² Przypadek ten, ze względu na prostotę zestrzajania, praktycznie biorąc, jest najważniejszy.

³ Wynik w tej formie podany został przez Feldtkellera [3] w 1953 r. Niemniej jednak już M. Dishal [1] w 1949 r. podobną drogą doszedł do układu równań podobnych do (6), z tą różnicą, że nie posługiwał się ilustracją rozmieszczeń zer funkcji przenoszenia (jak na rys. 3) i w związku z tym nie została w jego pracy uwydatniona interpretacja geometryczna współczynnika ε .

$$k_{12}^2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + 5\varepsilon^2) - d_1 \cdot d_3 - d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_3 & 1 \\ \frac{d_{sr}^3 \varepsilon}{4} (3 + \varepsilon^2) - d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 & d_1 \end{vmatrix}}{d_1 - d_3},$$

$$k_{23}^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + 5\varepsilon^2) - d_1 \cdot d_3 - d_1 \cdot d_2 - d_2 \cdot d_3 \\ d_3 & \frac{d_{sr}^3 \varepsilon}{4} (3 + \varepsilon^2) - d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \end{vmatrix}}{d_1 - d_3}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$2\varepsilon d_{sr} = C, \quad \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + 5\varepsilon^2) = B, \quad \frac{d_{sr}^3 \varepsilon}{4} (\varepsilon^2 + 3) = A$$

wartość współczynnika sprzężenia k_{12}^2 można przepisać jako

$$k_{12}^2 = \frac{d_1 B - (d_1 d_3 + d_1 d_2 + d_2 d_3) - A + d_1 d_2 d_3}{d_1 - d_3} = \frac{d_1 B - d_1^2 (d_2 + d_3) - A}{d_1 - d_3}.$$

Ponieważ

$$d_1 + d_2 + d_3 = C,$$

przeto

$$k_{12}^2 = \frac{d_1 B - d_1^2 (C - d_1) - A}{d_1 - d_3} = \frac{d_1^3 - C d_1^2 + B d_1 - A}{d_1 - d_3}.$$

Przekształcając podobnie wyrażenie k_{23}^2 otrzymamy ostatecznie

$$k_{12}^2 = \frac{d_1^3 - C d_1^2 + B d_1 - A}{d_1 - d_3}, \quad (7a)$$

$$k_{23}^2 = - \frac{d_3^3 - C d_3^2 + B d_3 - A}{d_1 - d_3}, \quad (7b)$$

$$d_1 \neq d_3.$$

Oprócz warunku $d_1 + d_2 + d_3 = C$ narzucimy dodatkowy warunek

$$k_{12}^2 > 0 \quad \text{oraz} \quad k_{23}^2 > 0, \quad (8)$$

to jest przyjmujemy, że sprzężenie jest dokonane za pomocą elementów urojonych.

Aby stwierdzić kiedy warunek (8) jest spełniony, należy zbadać zachowanie się funkcji

$$Y(d) = d^3 - Cd^2 + Bd - A,$$

będącej licznikiem wyrażeń (7a) i (7b).

Ponieważ wyróżnik równania $Y(d)=0$ jest zawsze większy od zera, przeto równanie ma zawsze jeden pierwiastek rzeczywisty, którego wartość jest

$$d_{(0)} = \varepsilon \cdot d_{sr}.$$

Jeżeli przyjmiemy chwilowo, że $d_1 > d_3$, to dla spełnienia warunku (8) licznik wyrażenia (7a) musi być dodatni; licznik zaś wyrażenia (7b) jest ujemny, stąd dla $d_1 > d_3$

$$d_1 > d_{(0)} = \varepsilon \cdot d_{sr},$$

$$d_3 < d_{(0)} = \varepsilon \cdot d_{sr}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$d_1 = (1 + \alpha) \varepsilon d_{sr},$$

$$d_2 = B \cdot \varepsilon d_{sr}, \quad (9a)$$

$$d_3 = \gamma \cdot \varepsilon d_{sr},$$

wówczas z równania (6c) otrzymamy

$$d_1 + d_2 + d_3 = (1 + \alpha + \beta + \gamma) \varepsilon d_{sr} = 2\varepsilon d_{sr},$$

czyli

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Przy doborze dobroci obwodów należy dążyć, ze względów praktycznych, do możliwie dużych wartości d . Ponieważ suma ich jest stała, przeto celowo byłoby obranie d_1 możliwie bliskie εd_{sr} (tzn. $\alpha \ll 1$), a $d_2 = d_3$ (Wówczas jednak $k_{12} \rightarrow 0$). Wartości tłumień obwodów w tym przypadku są następujące⁴:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= (1 + \alpha) \cdot \varepsilon d_{sr}, \\ d_2 &= \frac{1 - \alpha}{2} \cdot \varepsilon d_{sr}, \\ d_3 &= \frac{1 - \alpha}{2} \cdot \varepsilon d_{sr}. \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Przypadek $k_{12} = 0, k_{23} \neq 0$ jest o tyle interesujący, że można go zreali-

⁴ Interesującą okolicznością jest, że warunek fizyczności układu podawany przez wielu autorów [2], [3], [4], [6], $|d_1 - d_3| > d_2$, w interpretacji wzorów (9) prowadzi do banalnej zależności $1 + \alpha > 0$.

zować sprzęgając pojedynczy obwód I poprzez lampę z parą obwodów sprzężonych II i III. Wówczas

$$k_{12}=0, \quad d_1=\varepsilon d_{sr},$$

$$d_2=d_3=\frac{\varepsilon d_{sr}}{2}=\frac{d_1}{2}, \quad k_{23}^2=\frac{3}{4}d_{sr}^2.$$

Gdy przyjmiemy, teraz kolejno $d_3 > d_1$, otrzymamy następujące symetryczne odwrócenie wzorów:

$$d_3=(1+a) \cdot \varepsilon \cdot d_{sr},$$

$$d_2=\frac{1-a}{2} \varepsilon \cdot d_{sr},$$

$$d_1=\frac{1-a}{2} \varepsilon \cdot d_{sr}.$$
(9c)

Analogicznie więc do poprzedniego istnieje tu przypadek $k_{23}=0$. Ze wzorów (9) widać, że przypadek *maksymalnie płaskiej* krzywej tłumienia roboczego ($\varepsilon=1$) jest najkorzystniejszy ze względu na wartości dobroci obwodów. Przebieg *równofalisty* prowadzi do zmniejszenia tłumień w stosunku ε .

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $d_1=d_3$. Wówczas równania przyjmą postać

$$d_1^2 d_2 + (k_{12}^2 + k_{23}^2) d_1 = A,$$

$$2d_1 d_2 + d_1^2 + (k_{12}^2 + k_{23}^2) = B,$$

$$2d_1 + d_2 = C.$$

Rugując $(k_{12}^2 + k_{23}^2)$ oraz d_2 otrzymamy

$$d_1^3 - C d_1^2 + B d_1 - A = 0.$$

Równanie powyższe (podobnie jak licznik wyrażeń (7)) ma dla wszystkich wartości ε jeden pierwiastek rzeczywisty

$$d_1=d_3=\varepsilon d_{sr},$$

wtedy $d_2=0$.

Przypadek symetrycznego tłumienia skrajnych obwodów jest oczywiście odpowiednikiem bezstratnego, obciążonego obustronnie filtra Zobela⁵.

Interesująca jest okoliczność, że w przypadku symetrycznego rozkładu tłumień ($d_1=d_3$) jest ustalona jedynie suma kwadratów współczynników sprzężeń

$$k_{12}^2 + k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + \varepsilon^2).$$
(10)

W ramach tych rozkład wartości k_{12}^2 i k_{23}^2 jest dowolny.

⁵ Dla $\varepsilon=1$.

Jako szczególne przypadki można wymienić

$$k_{12}^2 = 0, \quad k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + \varepsilon^2),$$

$$k_{23}^2 = 0, \quad k_{12}^2 = \frac{d_{sr}^2}{4} (3 + \varepsilon^2)$$

oraz

$$k_{12}^2 = k_{23}^2 = \frac{d_{sr}^2}{8} (3 + \varepsilon^2).$$

4. PRZYPADEK RÓWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW SPRZĘŻEN

Jeżeli $k_{12} = k_{23} = k$ i $d_1 \neq d_2 \neq d_3$, to równania warunkujące równowagę przebieg tłumienia roboczego można napisać w sposób następujący

$$d_1 d_3 + d_1 d_2 + d_2 d_3 + 2k^2 = B,$$

$$d_1 d_2 d_3 + (d_1 + d_3) k^2 = A,$$

$$d_1 + d_2 + d_3 = C.$$

Z dwóch pierwszych równań otrzymujemy

$$k^2 = \frac{1}{2} (B - d_1 d_3 - d_1 d_2 - d_2 d_3) = \frac{A - d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{d_1 + d_3}, \quad (11)$$

czyli

$$A - d_1 d_2 d_3 = \frac{1}{2} (B - d_1 d_3 - d_1 d_2 - d_2 d_3) \cdot (d_1 + d_3).$$

Po rozwinięciu i uproszczeniu

$$2A = B(d_1 + d_3) - d_1^2(d_2 + d_3) - d_3^2(d_1 + d_2).$$

Otrzymamy więc ostatecznie dwa równania nie zawierające k^2 , a mianowicie

$$2A = B(d_1 + d_3) - d_1^2(d_2 + d_3) - d_3^2(d_1 + d_2),$$

$$C = d_1 + d_2 + d_3.$$

Mamy tu trzy nieznanne wartości tłumienia d_1 , d_2 i d_3 ; rugując jedną z nich, na przykład d_3 , za pomocą drugiego równania otrzymamy zależność, która wiąże d_1 z d_2

$$(C - 3d_2) d_1^2 - (C^2 + 3d_2^2 - 4Cd_2) d_1 + (BC - 2A - Bd_2 - C^2 d_2 + 2Cd_2^2 - d_2^3) = 0. \quad (12)$$

Dla fizyczności układu d_1 musi być rzeczywiste, wyróżnik Δ powyższego równania musi być ≥ 0 , czyli

$$\Delta = (C^2 + 3d_2^2 - 4Cd_2)^2 - 4(C - 3d_2)(BC - 2A - Bd_2 - C^2 d_2 + 2Cd_2^2 - d_2^3) \geq 0.$$

Podstawiając wartości A , B , C i upraszczając, otrzymamy

$$\frac{A}{C^4} = -3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^4 - \frac{7}{4} \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 - \frac{9}{4\varepsilon^2} \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{d_2}{C} + \frac{3}{4\varepsilon^2} \frac{d_2}{C} + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 \geq 0.$$

Możemy tu pominąć znany już z rozdziału 3 przypadek

$$\frac{d_2}{C} = 0,$$

który prowadzi do symetrycznego rozkładu tłumień $d_1 = d_3 = \frac{C}{2}$.

Otrzymamy wówczas

$$-3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 - \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4\varepsilon^2} \right) \frac{d_2}{C} + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4\varepsilon^2} \geq 0.$$

Z drugiej strony nie wystarcza jeszcze, gdy d_1 jest rzeczywiste. Nie może ono być ani ujemne, ani też równe lub większe od $C = 2 \cdot \varepsilon \cdot d_{sr}$. Zatem

$$0 < \frac{d_1}{C} < 1.$$

W przypadku $\varepsilon = 1$, warunek $\frac{A}{C^4} \geq 0$ prowadzi do zależności

$$-3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 - 4 \left(\frac{d_2}{C} \right) + 1 \geq 0.$$

Lewa strona powyższej nierówności ma jeden pierwiastek rzeczywisty

$$\frac{d_2}{C} = 0,354,$$

wobec czego warunek $\frac{A}{C^4} \geq 0$ pociąga za sobą

$$\frac{d_2}{C} \leq 0,354.$$

Drugi zaś warunek

$$0 < \frac{d_1}{C} < 1$$

zawęzi nam ostatecznie granice ⁶ dopuszczalnych wartości $\frac{d_2}{C}$ tak, iż

⁶ Wynika to stąd, że zgodnie ze wzorem (14)

$$0 < \frac{3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 - 4 \frac{d_2}{C} + 1 + \sqrt{-3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^4 + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 - 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 + \frac{d_2}{C}}}{2 \left(1 + 3 \frac{d_2}{C} \right)} < 1.$$

$$0 < \frac{d_2}{C} < 0,295. \quad (13)$$

Z zależności (12) otrzymamy

$$d_1 = \frac{C^2 + 3d_2^2 - 4Cd_2}{2(C - 3d_2)} \pm \frac{\sqrt{(C^2 + 3d_2^2 - 4Cd_2)^2 - 4(C - 3d_2)(BC - 2A - Bd_2 - C_2d + 2Cd_2^2 - d_2^3)}}{2(C - 3d_2)}.$$

Po podstawieniu wartości A i B dla $\varepsilon = 1$

$$\frac{d_1}{C} = \frac{3\left(\frac{d_2}{C}\right)^2 - 4\frac{d_2}{C} + 1 + \sqrt{-3\left(\frac{d_2}{C}\right)^4 + 4\left(\frac{d_2}{C}\right)^3 - 4\left(\frac{d_2}{C}\right)^2 + \frac{d_2}{C}}}{2\left(1 + 3\frac{d_2}{C}\right)}. \quad (14)$$

Ze wzoru (14) obliczymy $\frac{d_1}{C}$. Następnie, znając $\frac{d_1}{C}$, $\frac{d_2}{C}$ oraz sumę wszystkich trzech tłumień, obliczymy również $\frac{d_3}{C}$. Wreszcie współczynnik sprzężenia k obliczymy ze wzoru (11).

W przypadku, gdy $0 < \varepsilon < 1$ granice dopuszczalnych $\frac{d_2}{C}$ szybko się zwiężają w miarę malenia ε . Ulega tu przesunięciu tylko górna granica. Jako ilustrację podajemy, że dla $\varepsilon = 0,5$

$$0 < \frac{d_2}{C} < 0,25, \quad (15)$$

Górna granica $\frac{d_2}{C}$ określona jest z warunku $\frac{d_1}{C} < 1$, dla $\frac{d_2}{C} > 0,295$ jest $\frac{d_1}{C} > 1$, podczas gdy dolna granica wynika z fizyczności samego obwodu II.

Warunek $\frac{d_1}{C} > 0$ jest tu spełniony przy stosowaniu znaku plus przed pierwiastkiem wzoru (14). Jest on również spełniony dla znaku minus przed pierwiastkiem dla $\frac{d_2}{C} < 0,22$. Oznacza to, że dla tych wartości $\frac{d_2}{C}$ dostajemy dwie różne wartości $\frac{d_1}{C}$ które spełniają warunki w maksymalnej płaskości.

Granica ze względu na $\frac{d_1}{C^4} \geq 0$ jest $\frac{d_2}{C} \leq 0,35$, ze względu zaś na $0 < \frac{d_1}{C} < 1$ oraz fizyczność obwodu II — jest znów $0 < \frac{d_2}{C} < 0,25$. Przy tym dla tych wartości $\frac{d_2}{C}$ obie wartości $\frac{d_1}{C}$ są dodatnie, niezależnie od tego czy bierzemy znak plus, czy minus przed pierwiastkiem równania (17).

podczas gdy dla $\varepsilon = 0,1$ ⁸

$$0 < \frac{d_2}{C} < 0,02. \quad (16)$$

Wartość $\frac{d_1}{C}$ wyraża się tu oczywiście zależnością

$$\frac{d_1}{C} = \frac{3\left(\frac{d_2}{C}\right)^2 - 4\frac{d_2}{C} + 1 \pm \sqrt{-3\left(\frac{d_2}{C}\right)^4 - \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4\varepsilon^2}\right)\left(\frac{d_2}{C}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\varepsilon^2}\right)\frac{d_2}{C} + 4\left(\frac{d_2}{C}\right)^3}}{2\left(1 + 3\frac{d_2}{C}\right)} \quad (17)$$

otrzymaną ze wzoru (12) po podstawieniu wartości A i B .

W celu zakończenia dyskusji przypadku $k_{12} = k_{23}$, $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ należy zwrócić uwagę że w stadium początkowym zamiast rugować d_3 można było wyrugować d_1 , co doprowadziłoby do równania o formie identycznej jak (12), gdzie d_3 figurowałoby zamiast d_1 . Doprowadza więc to tylko do odwrócenia końcówek filtru. Organiczenia dotyczące $\frac{d_2}{C}$ pozostają bez zmiany.

Szczególnym przypadkiem w stosunku do poprzednio rozpatrzonych jest przypadek dwóch równych dobroci $d_2 = d_3$. Wtedy równania warunkujące *równofalisty* przebieg tłumienia przyjmą postać

$$\begin{aligned} d_1 + 2d_2 &= C, \\ B(d_1 + d_2) - 2d_1^2 \cdot d_2 - d_2^2 \cdot (d_1 + d_2) &= 2A. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości A i B otrzymamy

$$\frac{d_1}{C} + 2\frac{d_2}{C} = 1,$$

$$\frac{1}{16}\left(1 + \frac{3}{\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{16}\left(5 + \frac{3}{\varepsilon^2}\right)\left(\frac{d_1}{C} + \frac{d_2}{C}\right) - 2\left(\frac{d_1}{C}\right)^2 \cdot \frac{d_2}{C} - \left(\frac{d_2}{C}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_1}{C} + \frac{d_2}{C}\right).$$

Rugując zaś $\frac{d_1}{C}$ i upraszczając, otrzymamy

$$112\left(\frac{d_2}{C}\right)^3 - 112\left(\frac{d_2}{C}\right)^2 + \left(37 + \frac{3}{\varepsilon^2}\right) \cdot \left(\frac{d_2}{C}\right) - 4 = 0.$$

⁸ Ze względu na $\frac{A}{C^4} \geq 0$, $\frac{d_2}{C} \leq 0,344$, ze względu zaś na $0 < \frac{d_1}{C} < 1$ i fizyczność obwodu II $0 < \frac{d_2}{C} < 0,02$. Można tu używać znaku plus i minus we wzorze (17), jak w odnośniku 7.

Pierwiastek rzeczywisty tego równania jest

$$\frac{d_2}{C} = \sqrt[3]{-\frac{1}{224\epsilon^3} + \frac{1}{112\epsilon^2}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112\epsilon^2}} + \\ + \sqrt[3]{-\frac{1}{224\epsilon^2} - \frac{1}{112\epsilon^2}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112\epsilon^2}} + 0,33$$

lub

$$\frac{d_2}{C} = 6,075 \left[\sqrt[3]{-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{28\epsilon^2}} + \right. \\ \left. + \sqrt[3]{-\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{28\epsilon^2}} \right] + 0,33. \quad (18)$$

5. PRZYKŁADY

Dla ilustracji rozpatrzmy szereg przykładów.

Przykład 1.

Krzywa maksymalnie płaska z równymi współczynnikami sprzężenia

$$\epsilon = 1, \quad k_{12} = k_{23} = k.$$

Przyjmujemy $\frac{d_2}{C} = 0,1$, co jest dopuszczalne, gdyż wartość ta spełnia nierówność (13). Podstawiając przyjętą wartość $\frac{d_2}{C}$ do wzoru (14), otrzymamy

$$\frac{d_1}{C} = 0,63.$$

Wówczas

$$\frac{d_3}{C} = 1 - (0,63 + 0,1) = 0,27.$$

Dalej, obliczamy korzystając ze wzoru (11):

$$\frac{k^2}{d_{sr}^2} = 0,48,$$

jeżeli przyjmiemy

$$d_{sr} = \frac{10}{500} \frac{\text{kHz}}{\text{kHz}} = 0,02,$$

wówczas $k = 0,014$, czyli 1,40%.

Przykład 2.

Krzywa Czebyszewa z równymi współczynnikami sprzężenia

$$\varepsilon = 0,5, \quad k_{12} = k_{23} = k.$$

Przyjmujemy $\frac{d_2}{C} = 0,1$ jako spełniające nierówności (15). Wówczas ze wzoru (14)

$$\frac{d_1}{C} = 0,786,$$

zaś

$$\frac{d_3}{C} = 1 - (0,1 + 0,786) = 0,114.$$

Dalej podobnie jak w przykładzie poprzednim $\frac{k^2}{d_{sr}^2} = 0,397$, co dla $d_{sr} = 0,02$ daje $k = 0,0126$, czyli 1,26%.

Przykład 3.

Krzywa maksymalnie płaska z równymi dobrociami dwóch obwodów

$$\varepsilon = 1, \quad k_{12} = k_{23} = k \quad d_2 = d_3.$$

Obliczamy na podstawie wzoru (18)

$$\frac{d_2}{C} = \frac{d_3}{C} = 0,207.$$

Wówczas $\frac{d_1}{C} = 1 - 2 \cdot 0,207 = 0,586$. Po obliczeniu dobroci obwodów, ze wzoru (11) otrzymamy

$$\frac{k^2}{d_{sr}^2} = 0,503.$$

Przykład 4.

Krzywa Czebyszewa z równymi współczynnikami sprzężenia i równymi dobrociami dwóch obwodów

$$\varepsilon = 0,5 \quad d_2 = d_3, \quad k_{12} = k_{23} = k.$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie 3, otrzymamy

$$\frac{d_2}{C} = \frac{d_3}{C} = 0,110; \quad \frac{d_1}{C} = 0,78; \quad \frac{k^2}{d_{sr}^2} = 0,446.$$

WYKAZ LITERATURY

1. Dishal M. — Design of dissipative bandpass filters producing disired exact amplitude frequency characteristics. PIRE. Sept. 1949, s. 1050—1069.
2. Drexler G., Voss H. H. — Mehrkreisige Bandpassfilter mit optimaler Annäherung an die ideale Rechteckform der Durchlasskurve. Frequenz. Bd 6, Nr 11, 1952, s. 337 i Bd 7, Nr 1, 1933, s. 20.
3. Feldkeller R. — Einführung in die Theorie der Hochfrequenz Bandfilter. 4 Auflage S. Hirzel, 1953.
4. Gordon-Wagner T. C. — The general design of triple and quadruple tuned circuits. PIRE. March 1951, s. 279.
5. Lenkowski J. — Filtry pasmowe wielkiej częstotliwości. Przegl. Telekom. Nr 6—7, 1949, s. 167.
6. Mather N. W. — An analysis of triple tuned coupled circuits. PIRE. July 1950, s. 813.
7. Smoliński A. — Synteza wzmacniaczy rezonansowych z trójobwodowymi filtrami pasmowymi o sprzężeniu transformatorowym. Publikacja Nr 24 Katedry Podstaw Telekom. Polít. Warsz. 1954 i Arch. Elektrot. zesz. 1/55, s. 35.

Katedra Urządzeń Radioodbiornych
Politechnika Gdańska

Я. ЛЕНКОВСКИ

УСЛОВИЯ ОСУЩЕСТВИМОСТИ УЗКОПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА С ТРЕМЯ РЕЗОНАНСНЫМИ КОНТУРАМИ

Резюме

В статье подробно рассмотрены условия осуществимости фильтров с тремя резонансными контурами, точнее говоря, определения допустимых факторов затухания резонансных контуров, необходимых для получения частотной характеристики с формой Чебышева или же максимально плоской. В результате, приведены точные границы допустимых затуханий для случаев обеих характеристик фильтра.

Положим, что Y характеристическая матрица полных проводимостей короткого замыкания схемы (фиг. 1). Применяем частотное преобразование (полосовой фильтр — фильтр нижних частот) к ей главной диагонали. Проводимости Y_{12} и Y_{23} можно принять (для этой трансформации) постоянными, имея в виду узкую полосу фильтра. Вводя последовательно коэффициент связи (1) получаем определитель (2) матрицы Y .

Чтобы получить частотную характеристику фильтра Чебышева или максимально плоскую, нули передаточной функции усилителя должны быть расположены на эллипсе соответственно фиг. 3.

Остается теперь сравнить тождественно два многочлены: многочлен полученный из определителя заданной схемы с многочленом, которого нули находятся на эллипсе, как было сказано выше.

В результате получаем три уравнения улавливающие форму характеристики Чебышева или же максимально плоскую.

Дальше, рассматривается сперва случай неравных коэффициентов связи.

$$k_{12} \neq k_{23}$$

Показывается, что когда $d_1 \neq d_2$ тогда должно быть $d_1 > \varepsilon d_{sr}$ (где d_{sr} относительная ширина полосы пропускания) а d_2 и d_3 меньше этой же самой величины. Вместо d_1 можно взять d_3 больше εd_{sr} ; тогда d_2 и d_1 должны быть меньше εd_{sr} .

Получаются здесь следующие формулы для расчёта коэффициентов затухания

$$d_1 = (1 + a) \cdot \varepsilon \cdot d_{sr} \quad \text{или} \quad d_3 = (1 + a) \cdot \varepsilon d_{sr}$$

$$d_2 = d_3 = \frac{1-a}{2} \cdot \varepsilon d_{sr} \quad d_1 = d_2 = \frac{1-a}{2} \cdot \varepsilon d_{sr}$$

где a — некоторое положительное число в интервале $0 < a < 1$.

В случае, когда $d_1 = d_3$; $d_2 = 0$. Так как в этом случае сумма квадратов коэффициентов связи является постоянной величиной (10), можем принять любую величину на k_{12}^2 и k_{23}^2 (при условии постоянности их суммы).

Для $k_{12} = k_{23} = k$ и $d_1 \neq d_2 \neq d_3$, получаем следующие ограничения величины коэффициентов затухания, для $\varepsilon = 1$:

$$0 < d_2 < 0,295 C.$$

$$\frac{d_1}{C} = \frac{3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 - 4 \frac{d_2}{C} + 1 + \sqrt{-3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^4 + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 - 4 \left(\frac{d_2}{C} \right) + \frac{d_2}{C}}}{2 \left(1 + 3 \frac{d_2}{C} \right)}$$

$$d_3 = C - d_1 - d_2.$$

Когда $0 < \varepsilon < 1$ интервал допустимых значений d_2

для $\varepsilon = 0,5$

$$0 < d_2 < 0,25 C,$$

для $\varepsilon = 0,1$

$$0 < d_2 < 0,02 C.$$

В особенно важном случае, когда $d_2 = d_3$ и $k_{12} = k_{23} = k$, величины коэффициентов затухания получаются следующие

$$\frac{d_2}{C} = \sqrt[3]{-\frac{1}{224 \varepsilon^2} + \frac{1}{112 \varepsilon^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112 \varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{224 \varepsilon^2} - \frac{1}{112 \varepsilon^2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112 \varepsilon^2}}} + 0,33$$

$$d_1 = C - 2d_2.$$

J. LENKOWSKI

QUALITY FACTORS OF PHYSICALLY REALIZABLE NARROW-BAND FILTERS WITH THREE COUPLED CIRCUITS

Summary

Much has been written about triple tunel coupled circuits. Nevertheless, it seems worthwhile to discuss some aspects of this question.

The paper discusses the conditions under which the three coupled-circuits filter with Butterworth (B) or Tchebyshev (C) characteristic can be realized.

The extent to which the Q-factors of coupled circuits can be freely chosen is thoroughly analyzed, and appropriate formulae for practical applications are given.

For the network given in Fig. 1, the short-circuit admittance matrix is Y. We apply the frequency transformation (from bandpass to low pass system) to the elements of the principal diagonal only, as the coupling admittances can be seen

as nearly constant in the pass band. After introduction of the general coefficient of coupling (1) we arrive at the value (2) of the determinant of Y .

In order to get the transfer function the modulus of which is B or C in shape, we need only to put its zeros according to Fig. 3.

The special case of network synthesis met here is solved by equating identically two polynomials: one defined by the position of its zeros (Fig. 3), the other being the determinant of the network considered (Fig. 1).

As a result we get three equations (6) giving the conditions to be fulfilled for B or C shape of characteristic.

The case of different coefficients of coupling is first discussed. Now, it appears, that when

$$d_1 \neq d_2$$

d_1 must be greater than ε times relative bandwidth, whereas d_2 and d_3 smaller. The same can be said about d_3 taken instead of d_1 . In this case d_1 and d_2 must be less than ε times the relative bandwidth. The appropriate formulae for d_1 , d_2 , d_3 are:

$$\begin{aligned} d_1 &= (1+a) \cdot \varepsilon d_{sr} & \text{or} & & d_3 &= (1+a) \cdot \varepsilon d_{sr} \\ d_2 = d_3 &= \frac{1-a}{2} \cdot \varepsilon d_{sr} & & & d_1 = d_2 &= \frac{1-a}{2} \cdot \varepsilon d_{sr} \end{aligned}$$

where d_{sr} — relative bandwidth,

a — arbitrary positive value in the interval $0 < a < 1$.

In the case $d_1 = d_3$, $d_2 = 0$.

As the sum of the squares of coefficients of coupling in this case is constant (10), we can choose at liberty the values of both in this interval.

For the case $k_{12} = k_{23} = k$ and $d_1 \neq d_2 \neq d_3$, there are also several restrictions concerning d values. For instance, when $\varepsilon = 1$

$$0 < d_2 < 0,295 C$$

$$\frac{d_1}{C} = \frac{3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 - 4 \frac{d_2}{C} + 1 + \sqrt{3 \left(\frac{d_2}{C} \right)^4 + 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^3 - 4 \left(\frac{d_2}{C} \right)^2 + \frac{d_2}{C}}}{2 \left(1 + 3 \frac{d_2}{C} \right)}$$

$$d_3 = C - d_1 - d_2.$$

For $0 < \varepsilon < 1$, the interval of permissible values of d_2 grows narrower with ε getting smaller. As an example,

or $\varepsilon = 0,5$

$$0 < d_2 < 0,25 C$$

and for $\varepsilon = 0,1$

$$0 < d_2 < 0,02 C.$$

In the special case, when $d_2 = d_3$ and $k_{12} = k_{23} = k$ the values of d factors are following:

$$\frac{d_2}{C} = \sqrt[3]{-\frac{1}{224\varepsilon^2} + \frac{1}{112\varepsilon^2}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112\varepsilon^2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{224\varepsilon^2} - \frac{1}{112\varepsilon^2}} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{112\varepsilon^2}} + 0,33,$$

$$d_1 = C - 2d_2.$$

CZ. RAJSKI

621.314.21:512.8

Transformatorowa realizacja różnicy symetrycznej

Rękopis dostarczono 5. 10. 1954

Praca dotyczy układu stanowiącego prostą realizację działania różnicy symetrycznej w algebrze Boole'a oraz możliwości zastosowania tego układu w budowie elektronowych maszyn cyfrowych¹.

Dodawanie dwóch liczb wymaga przy zapisie pozycyjnym obliczenia na każdym miejscu znakowym cyfry sumy oraz wartości przeniesienia na najbliższe wyższe miejsce znakowe. Wyniki, jakie można przy tym otrzymać, w często stosowanym w maszynach cyfrowych systemie dwójkowym, są zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

Dodawanie dwóch składników w systemie dwójkowym

A	B	S	P	Oznaczenia
0	0	0	0	A — cyfra dodanej
0	1	1	0	B — cyfra dodajnika
1	0	1	0	S — cyfra sumy na tym samym miejscu znakowym
1	1	0	1	P — do przeniesienia na wyższe miejsce znakowe

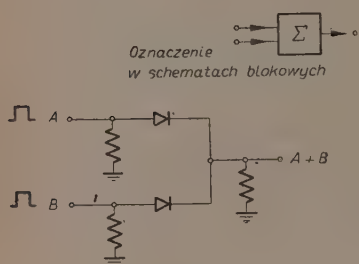
W symbolice algebry Boole'a $S = A \dot{+} B$, $P = AB$

Znaki 0 i 1 oznaczają tu cyfry, jeśli będziemy znaki te interpretowali jako symbole elementów wyróżnionych algebry Boole'a, to kolumny A, B i S zawierają działanie, które nazywa się tworzeniem różnicy symetrycznej, kolumny zaś A, B i P — działanie, które nazywa się mnożeniem Boole'a. To, że zmienna S jest różnicą symetryczną zmiennych A i B, za-

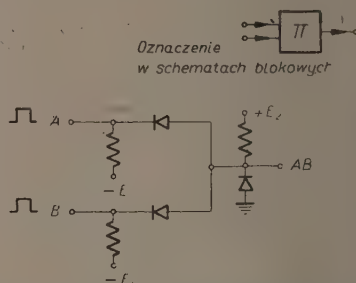
¹ Od Autora. W toku przygotowywania niniejszego artykułu do publikacji zostało stwierdzone, że opiniodawca doc. mgr R. Marczyński rozważał możliwość budowy transformatorowego układu różnicy symetrycznej niezależnie od autora i przed nim.

pisujemy w postaci $S = A \dot{+} B$, zaś to, że zmienna P jest iloczynem Boole'a zmiennych A i B , zapisujemy w postaci $P = AB$.

Jeśli znakom 0 i 1 przyporządkujemy pewne wartości jakiegoś parametru elektrycznego, np. znakowi 0 chwilowy brak potencjału, zaś znakowi 1 — potencjał chwilowy o wartości nominalnej różnej od zera, to elektryczne wykonywanie dodawania będzie możliwe, jeżeli potrafimy zbudować takie dwa układy, z których jeden realizowałby tworzenie różnicy symetrycznej, drugi zaś — mnożenie Boole'a. Najprostszy układ w przypadku realizacji diodowej odpowiada jednakże innemu działaniu, mianowicie dodawaniu Boole'a (rys. 1). Prostota tego układu wynika z okolicz-



Rys. 1. Schemat zasadniczy dla impulsów dodatnich układu realizującego dodawanie algebry Boole'a.

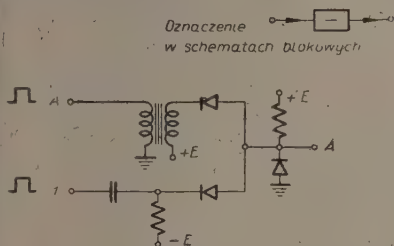


Rys. 2. Schemat zasadniczy dla impulsów dodatnich układu realizującego mnożenie Boole'a.

ności, że stanowi on w istocie rzeczy połączenie równoległe punktów A , B i C przy jednoczesnym zastosowaniu diod dla zabezpieczenia przed przechodzeniem impulsów z jednego wejścia na drugie. Jeśli przechodzenie to nie może spowodować błędnego działania, to układ z rysunku 1. można pominąć łącząc ze sobą bezpośrednio punkty A , B i C .

Układ realizujący mnożenie Boole'a jest nieco bardziej skomplikowany, gdyż stanowi pewnego rodzaju odwrócenie układu realizującego dodawanie (rys. 2). Podobnie prosta realizacja tworzenia różnicy symetrycznej — o ile autorowi wiadomo — nie jest znana. Działanie to zazwyczaj realizuje się drogą pośrednią przez zestawianie kilku układów, z których każdy realizuje jedno z działań algebry Boole'a przyjętych jako podstawowe. Często przyjmuje się tu wymienione wyżej działania dodawania i mnożenia oraz trzecie działanie — uzupełnianie (rys. 3). Za pomocą układów realizujących te trzy działania możemy zbudować urządzenie realizujące tworzenie różnicy symetrycznej. Jeden z możliwych schematów blokowych takiego urządzenia pokazany jest na rysunku 4. Zaletą tego rozwiązania jest, że jeden z układów (na rysunku 4 po lewej stronie u dołu) realizuje jednocześnie mnożenie Boole'a potrzebne do wytwarzania wartości P .

W ten sposób urządzenie pokazane na rysunku 4 stanowi sumator dwuskładnikowy. Liczba elementów wchodzących w skład takiego urządzenia jest z natury rzeczy znacznie większa od liczby elementów, z których zbudowany jest którykolwiek z układów podstawowych.



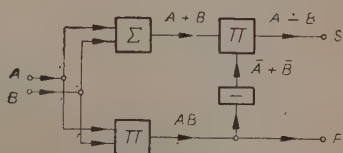
Rys. 3. Schemat zasadniczy dla impulsów dodatnich układu realizującego cego uzupełnianie Boole'a.

Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że liczbę elementów potrzebną do realizacji tworzenia różnicy symetrycznej można wydatnie zmniejszyć, budując układ podstawowy przy zastosowaniu transformatora z wyprowadzonymi środkami uzwojenia pierwotnego i uzwojenia wtórnego. Odpowiedni schemat pokazany jest na rysunku 5. Jeśli potencjały na zaciskach A i B mają jednocześnie wartość 1, to działanie ich znosi się i na zacisku C jest 0. Jeśli bądź tylko A, bądź tylko B ma wartość 1, to w obwodzie wtórnym transformatora powstają dwa impulsy SEM, które powodują przepływ poprzez diody prądu ładującego kondensator na wyjściu.

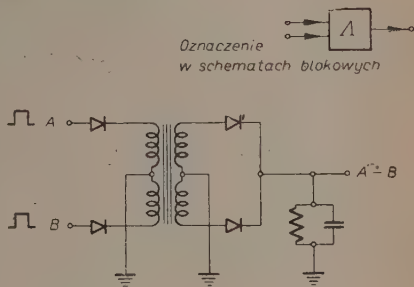
Przy stosowaniu tego układu

schemat sumatora dwuskładnikowego upraszcza się do postaci pokazanej na rysunku 6. Zysk na ogólnej liczbie elementów jest tu oczywisty. Również korzystne jest stosowanie układu podstawowego różnicy symetrycznej w urządzeniach bardziej skomplikowanych, np. w sumatorze trójskładnikowym. Można dowieść, że dla budowy takiego sumatora trzeba zrealizować działania nad zmiennymi A, B, C, tworzące wyrażenie $A \div B \div C$ dla sumy składników A, B, C, oraz wyrażenie $AB + AC + BC$ dla przeniesienia.

Jedno z możliwych rozwiązań układu realizującego potrzebne działania zawiera schemat blokowy pokazany na rysunku 7. Przy użyciu układu



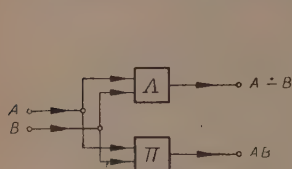
Rys. 4. Schemat blokowy układu realizującego tworzenie różnicy symetrycznej na zacisku S i iloczynu Boole'a na zacisku P.



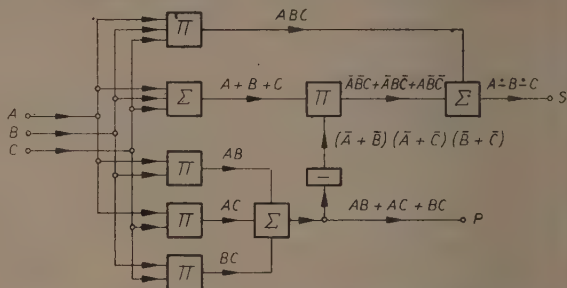
Rys. 5. Schemat zasadniczy dla impulsów dodatnich układu realizującego tworzenie różnicy symetrycznej algebry Boole'a.

podstawowego różnicy symetrycznej schemat ten można uprościć do postaci pokazanej na rys. 8. Jak widać, również w tym przypadku ogólna liczba elementów w sumatorze ulega wyraźnemu zmniejszeniu.

Stosowanie podstawowego układu różnicy symetrycznej pozwala na eliminację niektórych innych układów podstawowych. Przede wszystkim,

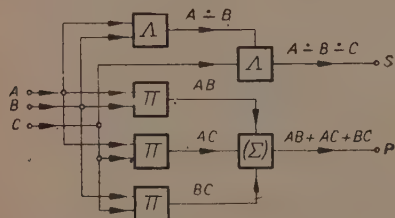


Rys. 6. Schemat blokowy sumatora dwuskładnikowego stosującego podstawowy układ różnicy symetrycznej.



Rys. 7. Schemat blokowy sumatora trójskładnikowego w wykonaniu konwencjonalnym.

jeśli na jednym z zacisków wejściowych układu różnicy symetrycznej, np. na zacisku B, będziemy utrzymywali stałą wartość 1, to znaczy po prostu dołączymy ten zacisk do generatora sterującego maszyny, to na zacisku C otrzymamy wartość \bar{A} , czyli uzupełnienie zmiennej A.



Rys. 8. Schemat blokowy sumatora trójskładnikowego zbudowanego przy użyciu układu podstawowego różnicy symetrycznej.

ze względu na liczbę elementów znacznie większą niż w układzie z rysunku 2, nie może mieć znaczenia praktycznego. Jeśli jednakże układ mnożenia stanowi część jakiegoś innego układu, np. sumatora, to do eliminacji można czasem użyć elementów, które muszą wystąpić w układzie dla innych celów.

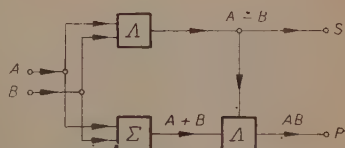
Na rysunku 9 pokazany jest przykładowo schemat blokowy sumatora dwuskładnikowego. Jest on prostszy od zazwyczaj stosowanego układu z rysunku 4 i nie pobiera prądu.

Inna możliwość eliminacji układu mnożenia polega na takim ukształtowaniu schematu blokowego, aby wymieniony układ w ogóle w nim nie

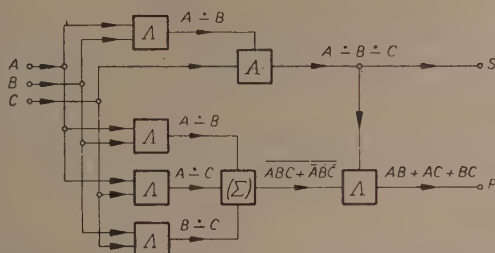
Można również wyeliminować układ podstawowy mnożenia Boole'a. Praktyczne znaczenie takiej eliminacji wynika z tego, że układ diodowy z rysunku 2 pobiera stały prąd, co jest niepożądane zarówno ze względu na wielkość urządzeń zasilających, jak i na efekt grzania. Eliminacja na podstawie prawa de Morgana prowadzi do układu, który,

występował. Na przykład sumator trójskładnikowy można zrealizować w sposób pokazany na rysunku 10. Symbol dodawania w nawiasach oznacza, że układ dodawania można tu zrealizować po prostu przez połączenie równoległe z pominięciem diod. Jak widzimy układ z rysunku 10 jest prostszy od często stosowanego układu pokazanego na rysunku 7, nie pobiera przy tym prądu w biegu luzem.

Zastosowanie transformatorowego układu różnicy symetrycznej może napotkać na pewne trudności realizacyjne związane z tym, że impulsy docierają do różnych punktów maszyny różnymi drogami i mogą mieć nieco różne kształty. Wobec tego dwa przeciwnie skierowane impulsy przyłożone na wejście transformatora mogą nie znosić się dokładnie, lecz dawać na wyjściu pewien szkodliwy impuls szczałkowy.



Rys. 9. Schemat blokowy sumatora dwuskładnikowego zbudowanego bez użycia układu podstawowego mnożenia.



Rys. 10. Schemat blokowy sumatora trójskładnikowego zbudowanego bez użycia układu podstawowego mnożenia.

Zmniejszenie tego niepożądanego efektu można uzyskać bądź przez zastosowanie odpowiedniego korektora amplitudy, bądź² przez dobór właściwego materiału magnetycznego na rdzeń.

Katedra Podstaw Telekomunikacji
Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. High speed computing devices — by the staff of the Engineering Research Association, New York 1950.

² Sugestia opiniodawcy.

Ч. РАЙСКИ

ТРАНСФОРМАТОРНОЕ ИСПОЛНЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКОЙ РАЗНИЦЫ

Резюме

В статье описана схема простой системы соответствующей симметрической разнице алгебры Буля, основанной на применении дифференциального трансформатора. Польза, вытекающая из применения этой системы в вычислительных целях, представлена различными примерами. Затруднения, могущие возникнуть в связи с возможностью неодинаковых импульсных форм, приходящих на вход трансформатора, могут быть устранены при помощи применения соответствующего материала сердечника или же при применении соответствующей коррекционной цепи формы импульсов при выходе.

CZ. RAJSKI

A SIMPLE HALF-ADDER

Summary

The paper describes the circuit of the simple unit corresponding to the Boolean symmetric difference based upon the use of the transformer with center-tapped primary and secondary windings. The advantages resulting from the incorporation of this unit into computing circuits are illustrated by various examples. The operating difficulties due to the possible inequalities of the pulse shapes arriving at the input of the transformer may be overcome either by the use of an appropriate core material or by a suitable pulse shape controlling circuit at the output.

621.392.52:621.398.822

R. KULIKOWSKI

Minimalne zniekształcenia i energia szumów w filtrach środkowoprzepustowych

Rękopis dostarczono 3. 11. 54

W pracy niniejszej wyznaczono charakterystyki filtrów środkowoprzepustowych, które przy danej energii szumów na wyjściu układu zapewniają minimalne zniekształcenia impulsów prostokątnych o danej szerokości. Jako kryterium zniekształceń przyjęto tzw. błąd kwadratowy z prostokątną funkcją ważkości. Przy zadanym poziomie zniekształceń wyznaczone charakterystyki zapewniają również minimalną wartość energii szumów na wyjściu układu.

1. WSTĘP

W teorii odbioru sygnałów impulsowych występujących na tle „białego szumu” wiele uwagi poświęca się tzw. filtrom zespolono-sprzężonym [1], [4], [5], które pozwalają na otrzymanie maksymalnego stosunku mocy sygnału do mocy szumu na wyjściu układu filtrującego. Jednakże kryterium to zupełnie nie uwzględnia zniekształceń sygnału w układzie filtrującym, chociaż tego rodzaju zniekształcenia w urządzeniach impulsowych na ogół grają dużą rolę. Dlatego też przy wyznaczaniu charakterystyk układów filtrujących należy również uwzględniać zniekształcenia kształtu sygnału.

Zniekształcenia wnoszone przez układ określa się zwykle przez porównanie sygnału wyjściowego z sygnałem wejściowym. Na przykład zniekształcenie wnoszone przez układ dolnoprzepustowy określa się przez porównanie reakcji układu $h(t)$ na sygnał o kształcie skoku jednostkowego z funkcją jednostkową.

Jako analityczne kryterium zniekształceń przyjmuje się tzw. błąd kwadratowy określony wyrażeniem

$$\int_0^{\infty} [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt, \quad (1)$$

w którym τ jest wielkością opóźniania się sygnału w danym układzie.

Z kryterium takiego typu wynika założenie, iż mamy do czynienia z sygnałami rozciągającymi się od zera do nieskończoności. Jest to w pew-

nym stopniu idealizacja, gdyż impulsy takie rzadko spotykamy w praktyce, a zainteresowanie nasze zniekształceniami ogranicza się zwykle do przedziału skończonego, w którym jest określony impuls rozpatrywany. Ponadto kryterium to traci sens w przypadku układów dolno- i środkowoprzepustowych, gdzie sygnał wyjściowy $h(t)$ dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$ a co z tym idzie całka (1) nie jest zbieżna.

Dlatego też w pracy niniejszej jako kryterium zniekształceń przyjmujemy wielkość

$$I = \int_0^{\infty} w(t) [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt, \quad (2)$$

gdzie $w(t)$ jest funkcją ważkości, podporządkowującą każdemu momentowi czasu t , w którym występuje zniekształcenie $\delta(t) = 1(t-\tau) - h(t)$ odpowiednią ważkość wyrażającą stopień niepożądania zniekształceń w tym momencie.

Zatem zagadnienie polega na wyznaczeniu minimum funkcjonu (2) w założeniu, że energia szumu na wyjściu układu ma daną wartość E . Energia ta (przy tzw. białym szumie na wejściu) jest proporcjonalna

$$E = \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega, \quad (3)$$

gdzie $A(\omega)$ jest charakterystyką amplitudy, czyli modulem funkcji przekazywania układu $K(i\omega)$.

Warunek powyższy wyraża również oczywisty fakt, że charakterystyka amplitudy $A^2(\omega)$ ogranicza skończone pole, przy czym wielkość tego pola zależy od czynników konstrukcyjnych, tj. może być powiększona przez zastosowanie układów korekcji, sprzężenia zwrotnego itp.

Na zasadzie wzoru Parsevalla warunek (3) można przedstawić również w postaci

$$E = \pi \int_0^{\infty} k^2(t) dt, \quad (4)$$

gdzie $k(t)$ jest reakcją układu na impuls $\delta(t)$ Diraca. Oczywiście że

$$k(t) = h'(t). \quad (5)$$

Ponieważ zakładamy, że rozpatrywany układ jest środkowoprzepustowy, to powinny być spełnione warunki:

$$A(0) = 0, \quad (6)$$

$$A(\infty) = 0, \quad (7)$$

które sprowadzają się do

$$h(0) = 0, \quad (8)$$

$$h(\infty) = 0, \quad (9)$$

2. WYZNACZENIE CHARAKTERYSTYK

Należy wyznaczyć minimum funkcjonału

$$I = \int_0^{\infty} w(t) [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt,$$

przy warunkach dodatkowych ¹:

$$\int_0^{\infty} h'^2(t) dt = \frac{E}{\pi} = B,$$

$$h(0) = 0,$$

$$h(\infty) = \infty.$$

W celu rozwiązania powyższego zagadnienia wariacyjnego utwórzmy pomocniczy funkcjonał

$$H = \int_0^{\infty} \{ \lambda h'^2(t) + w(t) [1(t-\tau) - h(t)]^2 \} dt, \quad (10)$$

gdzie $\lambda = \text{const.}$

Równanie Eulera, które określa ekstremale tego funkcjonału, przedstawia się zatem jako

$$\lambda h''(t) + w(t) [1(t-\tau) - h(t)] = 0. \quad (11)$$

Ponieważ zniekształcenia interesują nas jedynie w skończonym przedziale T (ze względu na skończoną długość impulsów mających praktyczne znaczenie), jako funkcję ważkości przyjmiemy:

$$w(t) = 1(t) - 1(t-T), \quad (T > \tau), \quad (12)$$

to jest funkcję, która w przedziale $(0, T)$ ma wartość jednostkową oraz na zewnątrz tego przedziału wartość równą zero. Wtedy równanie (11) rozpada się na dwa równania:

$$-\lambda h''(t) + h(t) - 1(t-\tau) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

$$-\lambda h''(t) = 0 \quad \text{dla} \quad T \leq t \leq \infty. \quad (14)$$

Założmy najpierw, że parametr λ jest rzeczywisty i dodatni; wtedy rozwiązanie równania (13) ma postać

$$h_1(t) = -k \int_{-\infty}^t \text{sh } k(t-t') 1(t'-\tau) dt' + \alpha e^{kt} + \beta e^{-kt}, \quad (15)$$

gdzie

$$k = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T.$$

¹ W pracy [2] rozpatrzono podobne zagadnienie przy $w(t) = 1$, $h(0) = 0$, $h(\infty) = 1$.

Ponieważ $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$, z równania (15) otrzymujemy

$$h_1(0) = \alpha + \beta,$$

a zatem

$$h_1(t) = -k \int_{-\infty}^t \operatorname{sh} k(t-t') 1(t'-\tau) dt' + a \operatorname{sh} kt, \quad (16)$$

gdzie a jest stałą dowolną.

Wzór (16) można zapisać w sposób następujący:

$$h_1(t) = \begin{cases} a \operatorname{sh} kt, & \text{dla } 0 \leq t \leq \tau, \end{cases} \quad (17a)$$

$$\begin{cases} 1 - \operatorname{ch} k(t-\tau) + a \operatorname{sh} kt, & \text{dla } \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad (17b)$$

Rozwiązanie równania (14) wyraża się w postaci

$$h_2(t) = C_1 t + C_2, \quad (18)$$

gdzie C_1, C_2 są stałymi dowolnymi.

Ponieważ zakładamy, że układ wnosi zniekształcenia na małych częstotliwościach, zatem warunek (9) pociąga za sobą warunek

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Ze względu na ciągłość $h(t)$ w punkcie T , to jest

$$h_1(T) = h_2(T),$$

otrzymujemy warunek

$$h_1(T) = 0. \quad (19)$$

Z równania (17b) otrzymujemy

$$a = \frac{\operatorname{ch} kT - 1}{\operatorname{sh} kT} = \operatorname{th} \frac{kT}{2}. \quad (20)$$

Optymalna charakterystyka przejściowa w przypadku powyższym ma zatem postać

$$\operatorname{th} \frac{kT}{2} \operatorname{sh} kt \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau, \quad (21a)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \operatorname{ch} k(t-\tau) + \operatorname{th} \frac{kT}{2} \operatorname{sh} kt & \text{dla } \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{dla } T \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (21b)$$

Na rys. 1 przedstawiono charakterystyki $h(t)$ dla $\tau = 0$, to jest

$$h(t_1) = 1 - \operatorname{ch} t_1 + \operatorname{th} \frac{T_1}{2} \operatorname{sh} t_1, \quad (22)$$

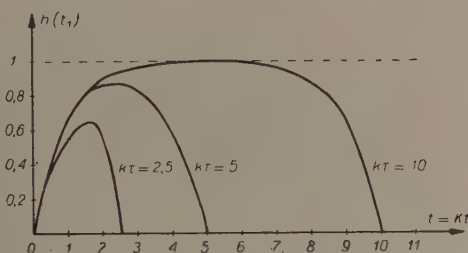
gdzie $t_1 = kt, T_1 = kT$, przy różnych wartościach kT .

Funkcja przenoszenia, która odpowiada (22), wyraża się przez

$$K(p_1) = p_1 \int_0^{T_1} h(t_1) e^{-p_1 t_1} dt_1 =$$

$$= 1 - e^{-p_1 T_1} + \frac{(1-a)p_1}{2(p_1-1)} [e^{-(p_1-1)T_1} - 1] + \frac{(1+a)p_1}{2(p_1+1)} [e^{-(p_1+1)T_1} - 1], \quad (23)$$

gdzie $p_1 = \frac{p}{K}$.



Rys. 1. Charakterystyki przejściowe układu przy różnych szerokościach impulsu.

Podstawiając $p_1 = i\omega_1$ znajdujemy optymalne charakterystyki częstotliwościowe

$$A(\omega_1) = \sqrt{[\operatorname{Re} K(i\omega_1)]^2 + [\operatorname{Im} K(i\omega_1)]^2}, \quad (24)$$

$$\varphi(\omega_1) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} K(i\omega_1)}{\operatorname{Re} K(i\omega_1)}, \quad (25)$$

w których

$$\operatorname{Re} K(i\omega_1) = 1 - \cos \omega_1 T_1 + \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + 1} [(a \operatorname{sh} T_1 - \operatorname{ch} T_1) \omega_1 \cos \omega_1 T_1 +$$

$$+ (a \operatorname{ch} T_1 - \operatorname{sh} T_1) \sin \omega_1 T_1 - \omega_1] \quad (26)$$

$$\operatorname{Im} K(i\omega_1) = -\sin \omega_1 T_1 + \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + 1} [(a \operatorname{ch} T_1 - \operatorname{sh} T_1) \cos \omega_1 T_1 +$$

$$+ (a \operatorname{sh} T_1 - \operatorname{ch} T_1) \omega_1 \sin \omega_1 T_1 - a] \quad (27)$$

oraz

$$a = \operatorname{th} \frac{T_1}{2}.$$

Błąd I , odpowiadający powyższemu rozwiązaniu otrzymujemy podstawiając wielkość (22) do wzoru (2), to jest

$$I = \int_0^T [1 - h(t)]^2 dt = \int_0^T [a \operatorname{sh} kt - \operatorname{ch} kt]^2 dt = \frac{1}{8k} [(a-1)^2 e^{2T_1} - 4(a^2-1)T_1 - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a]. \quad (28)$$

Podstawiając $h(t)$ ze wzoru (22) do (5) i (4) otrzymujemy

$$B = \int_0^T h'^2(t) dt = \frac{k}{2} [(a-1)^2 e^{2T_1} + 4T_1(a^2-1) - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a], \quad (29)$$

gdzie $T_1 = kT$.

Zatem przy T danym przez

$$T = \frac{T_1}{k} = \frac{T_1}{8B} [(a-1)^2 e^{2T_1} + 4T_1(a^2-1) - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a] \quad (30)$$

otrzymamy

$$k = \frac{8B}{[(a-1)^2 e^{2T_1} + 4T_1(a^2-1) - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a]}. \quad (31)$$

Błąd I będzie zatem

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{64B} [(a-1)^2 e^{2T_1} + 4(a^2-1)T_1 - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a] [(a-1)^2 e^{2T_1} - \\ &\quad - 4T_1(a^2-1) - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a] = \\ &= \frac{1}{64B} \{ [(a-1)^2 e^{2T_1} - (a+1)^2 e^{-2T_1} + 4a]^2 - 16T_1^2(a^2-1)^2 \}, \quad (32) \end{aligned}$$

gdzie $a = \operatorname{th} \frac{T_1}{2}$.

Wykres tego błędu przedstawiono na rys. 2, na którym podano również wykres błędu średniokwadratowego $\frac{IB}{T_1}$ (krzywa przerywana).

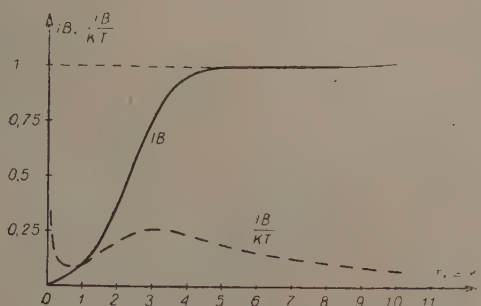
W przypadku k urojonego, to jest $k = i\mu$, rozwiązanie równania (13) przy $\tau = 0$ ma postać

$$h(t) = \mu \int_0^t \sin \mu(t-t') dt' + b \sin \mu t = 1 - \cos \mu t + b \sin \mu t \quad (33)$$

dla $0 \leq t \leq T$.

Z warunku (19) otrzymujemy

$$b = \frac{\cos \mu T - 1}{\sin \mu T} = -\operatorname{tg} \frac{\mu T}{2} \quad (34)$$



Rys. 2. Wykresy błędów przy różnych szerokościach impulsu.

W powyższym przypadku optymalna funkcja przejściowa układu (33) jest funkcją okresową o okresie $T_0 = \frac{2\pi}{\mu}$. Przypadek ten ma ograniczoną wartość praktyczną.

3. DYSKUSJA WYNIKÓW

Wyznaczone charakterystyki czasowe (21a, b), (22) oraz odpowiadające im charakterystyki częstotliwościowe (23), (24), (25) określają układ, który przy danym poziomie energii szumów na zaciskach wyjściowych pozwala na przeniesienie impulsu o danej szerokości z minimalnymi zniekształceniami obliczonymi według kryterium (2).

Układ ma również tę właściwość, że przy zadanym poziomie zniekształceń energia szumów na wyjściu osiąga minimum. Wynika to z zasady „wzajemności“ zachodzącej dla zagadnień wariacyjnych typu izoperymetrycznego [3].

Poziom energii szumów jest również jednoznacznie związany z polem ograniczonym przez charakterystykę $A^2(\omega)$. Wielkość ta jest znowu związana z czynnikami natury konstrukcyjnej. Wynika stąd możliwość zaprojektowania układu, który w danych warunkach ma optymalne własności ze względu na zniekształcenia kwadratowe oraz tłumienie szumów.

Jak wynika z rys. 2, zniekształcenia impulsów krótkich są bliskie zeru. Wynika to stąd, że sam przedział przybliżenia dąży do zera. Natomiast średni błąd kwadratowy dąży w tym przypadku do nieskończoności (krzywa przerywana), to znaczy iż impulsy krótkie są silniej zniekształcane niż impulsy długie.

Wyznaczone charakterystyki częstotliwościowe (23), (24), (25) pokazują w jaki sposób należy „rozłożyć” tłumienie (bądź wzmacnienie) układu aby w danych warunkach uzyskać optymalne rezultaty.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Dwork B.: P.I.R.E., V. 38, 1950, p. 771—774.
2. Kulikowski R., Plebański J.: Optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych. Arch. Elektrot., T. IV, z. 2, 1955.
3. Ławrentiew M., Lusternik L.: Rachunek wariacyjny. (tłum. z ros.), Warszawa, 1954.
4. Siemionow N. A.: Radiotekhnika. T. 8, nr 2, 1953.
5. Van Vleck J., Middleton D.: Journal of applied phys., V. 17, 1946, p. 940—971.

Р. КУЛИКОВСКИ

МИНИМАЛЬНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ И ЭНЕРГИЯ ШУМОВ В ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРАХ

Резюме

В настоящей работе определяются характеристики полосовых фильтров, которые при заданной энергии шумов на выходе системы обеспечивают минимальные искажения прямоугольных импульсов о заданной длительности.

В качестве критерия искажений принято т. н. квадратическую ошибку с прямоугольной весовой функцией

$$I = \int_0^{\infty} w(t) [1(t-\tau) - h(t)]^2 \tau dt, \quad (2)$$

где $w(t)$ — весовая функция, которая выражается:

$$w(t) = 1 \text{ для } 0 \leq t \leq T,$$

$$w(t) = 0 \text{ для } T \leq t.$$

$$1(t) \text{ — единичный входной сигнал,}$$

$$h(t) \text{ — реакция системы на входной сигнал.}$$

Минимальное значение функционала (2) находится при добавочном условии

$$E = \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = \text{const}, \quad (3)$$

которое определяет энергию „белого шума” на выходе системы, или площадь ограниченную квадратом амплитудной характеристики системы $A^2(\omega)$.

Имея ввиду, что рассматриваемая система является полосовым фильтром, соблюдаются следующие условия:

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) = 0.$$

Решение поставленной вариационной задачи определяет оптимальную характеристику системы $h(t)$, т. е. характеристику которая обеспечивает передачу прямоугольного сигнала с минимальными квадратичными искажениями при заданном уровне энергии шумов на выходе системы.

Характеристика такова выражается:

$$h(t) = \begin{cases} \text{th} \frac{kT}{2} \cdot \text{sh} kt & \text{для } 0 \leq t \leq \tau, \\ 1 - \text{ch} k(t - \tau) + \text{th} \frac{kT}{2} \cdot \text{sh} kt & \text{для } \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{для } T \leq t. \end{cases} \quad (21)$$

где $k = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ множителя Лагранжа, который определяется на основе заданного E .

Характеристику $h(t)$ для $\tau=0$, $kT=\text{const}$ представлено на рис. 1

Искажения (2) соответствующие решению (21) выражаются:

$$I = \frac{\pi}{64E} \left\{ [(a-1)^2 e^{2kT} (a+1)^2 e^{-2kT} + 4a]^2 - 16 (a^2-1)^2 k^2 T^2 \right\} \quad (32)$$

$$a = \text{th} \frac{kT}{4}.$$

На рис. 2 приведён график функции $IB=f(kT)$ и $\frac{IB}{kT}=f(kT)$ (пунктиром). Как следует из этого рисунка искажения узких импульсов невелики. Это вызвано тем, что отрезок аппроксимации стремится к нулю. Относительная ошибка $\frac{IB}{kT}$ стремится в этом случае к бесконечности.

R. KULIKOWSKI

MINIMUM DISTURBANCE AND NOISE ENERGY IN BANDPASS FILTERS

Summary

In this paper bandpass filter characteristics are determined, which guarantee minimum distortion of rectangular pulses of a given width for definite output noise energy. As a distortion criterion the so called square error is accepted with a weight defined by the rectangular function

$$I = \int_0^{\infty} w(t) [1(t-\tau) - h(t)]^2 dt, \quad (2)$$

where $w(t)$ — the weight function defined as follows:

$$w(t) = 1 \quad \text{for } 0 \leq t \leq T,$$

$$w(t) = 0 \quad \text{for } T \leq t,$$

$1(t)$ —unit input signal,

$h(t)$ —input signal circuit reaction.

The minimum of the functional (2) is determined at the izoperimetric condition

$$E = \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} h'^2(t) dt = \text{const}, \quad (3)$$

which determines the "white noise" energy at the output of the circuit or the area limited by the square of the circuit amplitude characteristic $A^2(\omega)$.

As the circuit discussed is a band pass one, the following conditions should be applied:

$$h(0)=0, \quad h(\infty)=0.$$

The solution of the above variational problem defines the optimum characteristic $h(t)$ of the circuit, i. e. a characteristic which guarantees passing a rectangular signal of a width T with a minimum square distortion when a given level of noise energy is obtained at the circuit output; or, when at a given level of distortions a minimum noise energy is required.

This characteristic is as follows:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{kT}{2} \operatorname{th} kt & \text{for } 0 \leq t \leq \tau, \\ 1 - \operatorname{ch} k(t-\tau) + \frac{kT}{2} \operatorname{th} kt, & \text{for } \tau \leq t \leq T, \\ 0 & \text{for } T \leq t. \end{cases} \quad (21)$$

where k is the so called Lagrange multiplier factor, which is found for a given value of E . The characteristics $h(t)$, when $\tau=0$ and $kT=\text{const}$, are shown in Fig. 1.

The distortions (2) corresponding to the solution (21) are:

$$I = \frac{\pi}{64E} \{ [(a-1)^2 e^{2kT} - (a+1)^2 e^{-2kT} + 4a]^2 - 16(a^2-1)^2 k^2 T^2 \} \quad (32)$$

$$a = \operatorname{th} \frac{kT}{4}$$

The graph of this error is shown in Fig. 2 which presents also the mean square error graph $\frac{IE}{k\pi \cdot T}$ (the dotted line).

As may be seen the distortions of the short pulses are close to zero. This follows from the fact, that the approximation interval approaches zero. In this case the mean square error tends to infinity.

621.392.011.6

R. KULIKOWSKI, J. PLEBAŃSKI

Minimalne zniekształcenia sygnału stochastycznego w układach o małym poziomie szumów

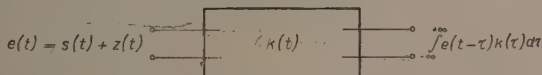
Rękopis dostarczono 15. 12, 1945

W niniejszej pracy rozpatrzono układy liniowe oraz ich charakterystyki odpowiadające minimalnym zniekształceniom średniokwadratowym przy filtracji i predykcji sygnału stochastycznego o danej funkcji korelacji w założeniu, że charakterystyki amplitudy tych układów ograniczają skończone pole. Wielkość tego pola jest ograniczona możliwościami konstrukcyjnymi, którymi dysponujemy przy projektowaniu układu. Dzięki takiemu ujęciu otrzymano wyniki przy gęstości widmowej szumów dążącej do zera.

Przytoczono konkretny przykład wyznaczenia charakterystyki układu poddanego działaniu sygnału typu „telegraficznego“.

1. WSTĘP

N. Wiener podał [5] rozwiązanie następującego, kluczowego w statystycznej teorii łączności, problemu: znając opis statystyczny (tzn. funkcje korelacji lub gęstości widmowe) sygnału nadanego $s(t)$ układu liniowego (rys. 1) zakłócanego przez $z(t)$, znaleźć funkcję przenoszenia $K(i\omega)$ układu,



Rys. 1. Układ odtwarzający sygnał wejściowy $s(t)$.

która odpowiada najlepszemu odtworzeniu sygnału $x(t) = X(p) \cdot s(t)$, gdzie $X(p)$ jest pewnym operatorem (np. $X(p) = e^{tp}$ — w przypadku predykcji, względnie $X(p) = 1$ — w przypadku filtracji). Jako kryterium wierności odtworzenia sygnału Wiener przyjął wielkość:

$$I^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} e(t - \tau) k(\tau) d\tau \right\}^2 dt, \quad (1)$$

gdzie $e(\tau) = s(\tau) + z(\tau)$:

¹ $k(t)$ jest tu funkcją przejściową układu, tj. reakcją układu na impuls jednostkowy Diraca $\delta(t)$.

Pozwoliło to sprowadzić problem do zagadnienia ekstrapolacji oraz interpolacji sygnału stochastycznego w przestrzeni Hilbertowskiej, analogicznego do zagadnienia rozpatrywanego przez A. N. Kołmogorowa [1].

Wprowadzając pojęcie funkcji korelacyjnych:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t+\tau) x(t) dt, \quad (2)$$

$$R_e(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e(t+\tau) e(t) dt, \quad (3)$$

$$R_{xe}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t+\tau) e(t) dt, \quad (4)$$

błąd (1) można wyrazić [4] jako

$$I^2 = R_x(0) - 2 \int_0^\infty k(\lambda) R_{xe}(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty k(\lambda) d\lambda \int_0^\infty k(\vartheta) R_e(\lambda - \vartheta) d\vartheta. \quad (5)$$

Jak wykazał N. Wiener, warunkiem koniecznym i dostatecznym dla tego by funkcjonal (1) osiągał minimum jest spełnienie równania całkowego Wienera — Hopfa

$$R_{xe}(\tau) - \int_0^\infty R_e(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \text{dla } \tau > 0. \quad (6)$$

Rozwiązanie równania (6) wyznaczające optymalną funkcję przejściową układu $k(t)$, która spełnia warunki fizycznej realizacji (tj. $k(t) = 0$ dla $t < 0$) wyraża się wzorem:

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

gdzie

$$K(i\omega) = \frac{1}{2\pi \Psi_1(i\omega)} \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{xe}(\omega')}{\Psi_2(i\omega')} e^{i\omega' t} d\omega'. \quad (7)$$

We wzorze tym $S_{xe}(\omega)$ jest gęstością widmową odpowiadającą funkcji korelacji $R_{xe}(\tau)$, podczas gdy $\Psi_1(i\omega)$ i $\Psi_2(i\omega)$ spełniające warunek

$$\Psi_1(i\omega) \cdot \Psi_2(i\omega) = S_e(\omega) \quad (8)$$

² $S_e(\omega)$ jest gęstością widmową związaną z $R_e(\tau)$ przekształceniem Fouriera.

są określone jako funkcje, z których pierwsza jest analityczna i ograniczona w dolnej półpłaszczyźnie ω , druga zaś — odpowiednio w górnej półpłaszczyźnie ω .

2. WYZNACZENIE OPTYMALNEJ FUNKCJI PRZENOSZENIA DLA UKŁADÓW Z MAŁYM POZIOMEM ZAKŁÓCEŃ $z(t)$

W przypadku układu, dla którego poziom zakłóceń jest równy zeru (lub bardzo mały), rozwiązanie (7) daje dość trywialny rezultat.

Na przykład w przypadku układu filtrującego, tj. $S_{xe} = S_{se}(\omega) = S_s(\omega)$, optymalna funkcja przenoszenia będzie

$$\begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{1}{2\pi\Psi_1(i\omega)} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_s(\omega')}{\Psi_2(i\omega')} e^{j\omega' t} d\omega' = \\ &= \frac{1}{2\pi\Psi_1(i\omega)} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(i\omega') e^{i\omega' t} d\omega' = 1, \end{aligned} \quad (9)$$

co odpowiada układowi wszechprzepustowemu. Układ taki, praktycznie biorąc, nie może być zrealizowany, gdyż charakterystyka amplitudy $|K(i\omega)| = A(\omega)$ ogranicza zwykle pole skończone, przy czym wartość tego pola zależy od możliwości konstrukcyjnych, którymi dysponujemy przy projektowaniu układu. Inaczej mówiąc, w przypadku układu, w którym wpływ zakłóceń można pominąć, podstawowe zagadnienie polega na znalezieniu takiej charakterystyki układu, która zapewniałaby minimalne zniekształcenia (1) sygnału $s(t)$ przy danych możliwościach konstrukcyjnych. Zagadnienie powyższe sprowadza się zatem do znalezienia minimalnej wartości funkcjonału (1) przy warunku dodatkowym

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} K(i\omega) K^*(i\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} k^2(t) dt = \varepsilon = \text{const.}^3 \quad (10)$$

Postawione wyżej zagadnienie jest izoperymetrycznym problemem wariacyjnym, który rozwiązujemy metodą mnożnika Lagrange'a. W tym celu tworzymy pomocniczy funkcjonał

$$\bar{I}(k) = \bar{I}^2 - \mu \left[E - \int_0^{\infty} k^2(t) dt \right], \quad (11)$$

gdzie $E = \frac{\varepsilon}{\pi}$, $\mu = \text{const.}$

³ Sens fizyczny warunku (10) polega również na tym, że w przypadku „białego szumu“ na wejściu układu o gęstości widmowej c^2 , wartość E jest proporcjonalna do wyjściowej energii szumów $E_{sz} = c^2 E$. Analogiczne zagadnienie dla przypadku sygnału jednostkowego zostało rozpatrzone w pracy [2].

Przyrównując wariację δI tego funkcjonału do zera, otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a:

$$R_{xe}(\tau) - \mu k(\tau) - \int_0^{\infty} R_e(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0, \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} k^2(t) dt = E. \quad (13)$$

Z równania (12), można wyznaczyć ekstremalną funkcję $k(t)$, która zależy parametrycznie od μ . Wstawiając tę funkcję do (13) można znaleźć μ w funkcji E .

Zakładając, że funkcja $K(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t) e^{-i\omega t} dt$ odpowiada ekstremalnemu rozwiązaniu, nie trudno znaleźć minimalną wartość błędu $I^2_{\min} = \Delta^2$. Podstawiając do (5) $R_{xe}(\tau)$ z (12), a następnie korzystając z zależności

$$R_e(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_e(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega,$$

oraz z (13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} k(\lambda) \left[\mu k(\lambda) + \int_0^{\infty} R_e(\lambda - \vartheta) k(\vartheta) d\vartheta \right] + \int_0^{\infty} k(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} d\vartheta R_e(\lambda - \vartheta) k(\vartheta) = \\ &= R_x(0) - 2\mu E - \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\vartheta R_e(\lambda - \vartheta) k(\lambda) k(\vartheta) = \\ &= R_x(0) - 2\mu E - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_e(\omega) |K(i\omega)|^2 d\omega, \end{aligned}$$

czyli

$$\Delta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_x(\omega) - S_e(\omega)] |K(i\omega)|^2 d\omega - 2\mu E. \quad (14)$$

Wykażemy obecnie, że równanie (12) można sprowadzić do równania (6), którego rozwiązanie (7) jest znane. Niech będzie

$$\bar{R}_e(\lambda) = R_e(\lambda) + \mu \delta(\lambda). \quad (15)$$

Wtedy przekształcenia Fouriera funkcji (15) daje

$$\bar{S}_e(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{R}_e(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = S_e(\omega) + \mu. \quad (16)$$

Zatem równanie (12) można przedstawić jako

$$R_{xe}(\tau) - \int_0^{\infty} \bar{R}_e(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0. \quad (17)$$

Rozwiązanie tego równania, które jest identyczne, z (6), wyraża się zatem przez

$$K(i\omega) = \frac{1}{2\pi \bar{\Psi}_1(i\omega)} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{xe}(\omega')}{\bar{\Psi}_2(i\omega')} e^{i\omega' t} d\omega', \quad (18)$$

przy czym

$\bar{\Psi}_1(i\omega)$ — funkcja analityczna i ograniczona w dolnej półpłaszczyźnie ω .

$\bar{\Psi}_2(i\omega)$ — funkcja analityczna i ograniczona w górnej półpłaszczyźnie ω .

Uwzględniając (16) możemy napisać

$$\bar{S}_e(\omega) = \bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega) = \Psi_1(i\omega) \cdot \Psi_2(i\omega) + \mu. \quad (19)$$

Zatem dla wyznaczenia optymalnej funkcji przenoszenia ze wzoru (18), należy rozbić $\bar{S}_e(\omega)$ na dwie funkcje $\bar{\Psi}_1(i\omega)$ oraz $\bar{\Psi}_2(i\omega)$ o określonych wyżej warunkach regularności. Wyznaczona w ten sposób funkcja przenoszenia zależy od parametru μ . Korzystając ze związku (13) wyznaczamy w funkcji zadanej wielkości E , co pozwala w sposób wyraźny przedstawić optymalną funkcję przenoszenia.

Z ogólnego rozwiązania (18) można otrzymać szereg rozwiązań szczególnych odpowiadających konkretnym zagadnieniom.

Na przykład w przypadku predykcji przy $z(t)=0$ będzie

$$S_{xe}(\omega) = e^{i\omega t_0} S_s(\omega), \quad (20)$$

$$S_e(\omega) = S_s(\omega) = \bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega), \quad (21)$$

gdzie t_0 jest wartością czasu przewidywania.

W przypadku układu z opóźnieniem τ i zakłóceniami $z(t)$

$$S_{xe}(\omega) = e^{-i\omega\tau} S_s(\omega), \quad (22)$$

$$S_e(\omega) = S_s(\omega) = \bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega). \quad (23)$$

W przypadku filtracji sygnału $s(t)$ występującego na tle zakłóceń $z(t)$:

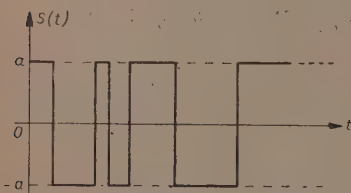
$$S_{xe}(\omega) = S_{se}(\omega) = S_s(\omega), \quad (24)$$

$$S_e(\omega) = S_s(\omega) + S_z(\omega) = \bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega). \quad (25)$$

Nie wdając się w ogólną dyskusję tych przypadków, zilustrujemy powyższe rozważania na konkretnym przykładzie filtracji.

3. FILTRACJA SYGNAŁU „TELEGRAFICZNEGO” PRZY MAŁYM POZIOMIE SZUMÓW

Zajmiemy się problemem znalezienia optymalnej funkcji przenoszenia $K(i\omega)$ dla układu, którego zadaniem jest oczyszczenie z białych szumów $z(t)$, o gęstości widmowej $S_z(\omega) = c^2 = \text{const}$ wejściowego sygnału $e(t)$; sygnał ten składa się z impulsów o wartości bezwzględnej a , zmieniających znak na jednostkę czasu średnio $\frac{b}{2}$ (sygnały telegraficzne, patrz rys. 2).



Rys. 2. Sygnał typu „telegraficznego”.

Sygnałem na wejściu układu jest w tym przypadku $e(t) = s(t) + z(t)$. Zakładając brak korelacji między $s(t)$ i $z(t)$ można wykazać, że gęstość widmowa $S_e(\omega)$ wynosi tu [3]

$$S_e(\omega) = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} + c^2. \quad (26)$$

Sygnałem na wyjściu ma być $s(t) = x(t)$, tak że $S_{xe}(\omega) = S_{se}(\omega) = S_s(\omega) = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2}$. Rozporządzamy więc wszystkimi danymi potrzebnymi

do wyliczenia optymalnej $K(i\omega)$.

Zgodnie z (25) mamy

$$\bar{S}_e(\omega) = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} + c^2 + \mu = \bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega). \quad (27)$$

Założymy $\frac{c}{a} \cdot \sqrt{b} = \text{sh } x_0$, $\mu = \frac{a^2}{b} (\text{sh } x)^2 - c^2 = \frac{a^2}{b} (\text{sh}^2 x - \text{sh}^2 x_0)$ ⁴,

wówczas

$$\bar{S}_e(\omega) = \frac{a^2}{b} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} + \text{sh}^2 x \right] = \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{\text{ch } x + \text{ish } x \frac{\omega}{b}}{1 + i \frac{\omega}{b}} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{\text{ch } x - \text{ish } x \frac{\omega}{b}}{1 - i \frac{\omega}{b}}$$

⁴ Zakładamy tym samym, że $\mu + c^2 > 0$. Można jednak wykazać, że nie prowadzi to do istotnych ograniczeń w rozważaniach.

Jako funkcje $\bar{\Psi}_1(i\omega)$, $\bar{\Psi}_2(i\omega)$ należy więc wybrać

$$\bar{\Psi}_1(i\omega) = \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{\operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b}}{1 + i \frac{\omega}{b}}, \quad \bar{\Psi}_2(i\omega) = \bar{\Psi}_1^*(i\omega).$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{S_{xe}(\omega)}{\bar{\Psi}_2(i\omega)} &= \frac{a^2}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} \cdot \frac{1 - i \frac{\omega}{b}}{\frac{a}{\sqrt{b}} \left(\operatorname{ch} x - i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b} \right)} = \\ &= \frac{\frac{a}{\sqrt{b}}}{\left(1 + i \frac{\omega}{b}\right) \left(\operatorname{ch} x - i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b} \right)} = \frac{a}{\sqrt{b}} e^{-x} \left(\frac{1}{1 + i \frac{\omega}{b}} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b}} \right). \end{aligned}$$

Ze względu na budowę wzoru (18) łatwo jest zauważyć, że $K(i\omega)$ dane jest jako $K(i\omega) = \frac{B(i\omega)}{\bar{\Psi}_1(i\omega)}$, gdzie $B(i\omega)$ jest częścią $\frac{S_{xe}}{\bar{\Psi}_2}$ zawierającą bieguny w górnej półpłaszczyźnie.

$$\text{W naszym przypadku zatem } B(i\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{e^{-x}}{1 + i \frac{\omega}{b}},$$

a przeto

$$K(i\omega) = \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{e^{-x}}{1 + i \frac{\omega}{b}} \cdot \frac{1 + i \frac{\omega}{b}}{\frac{a}{\sqrt{b}} \left(\operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b} \right)},$$

tak iż ostatecznie

$$K(i\omega) = \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b}}. \quad (28)$$

Rozporządzając $K(i\omega)$ łatwo wyznaczamy $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega$ jako

$$E = \frac{e^{-2x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \frac{\omega^2}{b^2}} = \frac{b e^{-2x}}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2} = \frac{2b}{e^{4x} - 1}.$$

Ponieważ $\operatorname{cth} u = 1 + \frac{2}{e^{2u} - 1}$, zatem powyższy związek można przepisać jako

$$E = b(\operatorname{cth} 2x - 1). \quad (29)$$

Rozviklując (29) względem x , wyznaczamy x w funkcji E jako

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{E}{b} \right) = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{2b}{E} \right). \quad (30)$$

Podstawiając $x = x(E)$ do (28) otrzymujemy ostatecznie optymalną charakterystykę problemu.

Dla przeprowadzenia dyskusji należy określić jeszcze z (14) optymalny błąd kwadratowy. Wykorzystując w (14) otrzymane wyżej wzory znajdujemy

$$\Delta^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_s(\omega) - [S_s(\omega) + c^2] |K(i\omega)|^2\} d\omega - 2\mu E.$$

Ale

$$\begin{aligned} S_s(\omega) |K(i\omega)|^2 &= \frac{a^2}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} \cdot \frac{e^{-2x}}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} = \\ &= e^{-2x} S_s(\omega) - \frac{a^2}{b} \operatorname{sh}^2 x |K(i\omega)|^2, \end{aligned}$$

a przeto

$$\Delta^2 = \frac{1 - e^{-2x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(\omega) d\omega + \left(\frac{a^2}{b} \operatorname{sh}^2 x - c^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega - 2\mu E.$$

Ponieważ jednak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{b} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} d\omega = \frac{a^2}{2},$$

korzystając z (10) mamy

$$\Delta^2 = \frac{a^2}{2} (1 - e^{-2x}) + \left(\frac{a^2}{b} \operatorname{sh}^2 x - c^2 \right) E - 2\mu E.$$

Korzystając jeszcze z zależności

$$c^2 = \frac{a^2}{b} \operatorname{sh}^2 x_0, \quad \mu = \frac{a^2}{b} (\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 x_0),$$

napiszemy

$$\Delta^2 = a^2 \left[\frac{1}{2} (1 - e^{-2x}) - \frac{E}{b} (\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 x_0) \right].$$

Wykorzystując wreszcie (29), wyrazimy Δ^2 wyłącznie pomocniczym parametrem x jako

$$\Delta^2 = a^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{th} x + \operatorname{sh}^2 x_0 (\operatorname{cth} 2x - 1) \right]. \quad (31)$$

Wzory (28), (30), (31) przedstawiają ostateczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia, bowiem podstawiając x wyrażone przez E do (28) i (31) można przeprowadzić pełną dyskusję rozwiązania.

Optymalna funkcja przenoszenia i związany z nią błąd kwadratowy zależą od parametru $\frac{E}{b}$ (patrz wykres $\Delta^2 = \Delta^2\left(\frac{E}{b}\right)$ rys. 3).

Jasne jest, że przy zadanym $\frac{c}{a} \sqrt{b}$ musi istnieć optymalna wartość $\frac{E}{b}$ dla której Δ^2 będzie najmniejsze.

Aby znaleźć to optimum, znajdujemy pochodną

$$\frac{d\Delta^2}{dE} = \frac{d\Delta^2}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dE}{dx}} = \frac{a^2}{b} [(\operatorname{sh} x_0)^2 - (\operatorname{sh} x)^2].$$

Wynika stąd, że Δ^2 posiada ekstremum przy $x = x_0$. Ponieważ:

$$\frac{d^2\Delta^2}{dE^2} = \frac{a^2}{2b} (\operatorname{sh} 2x)^3,$$

zatem dla $x = x_0 > 0$ mamy do czynienia z minimum.

Extremalna wartość E wynosi $E_0 = b (\operatorname{cth} 2x_0 - 1)$. W otoczeniu $E = E_0$, Δ^2 dane jest więc jako

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \Delta^2(E_0) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2\Delta^2}{dE^2} (E - E_0)^2 + \dots = \\ &= \frac{a^2}{2} (1 - e^{-2x_0}) + \frac{1}{2!} \frac{a^2}{2b} (\operatorname{sh} 2x_0)^3 (E - E_0) + \dots \end{aligned}$$

Warto dodać, że przy $E = E_0$ rozwiązanie przechodzi w optymalną wienerską funkcję przenoszenia dla problemu eliminacji szumów, postawionego bez warunku dodatkowego (10), tj.

$$K(i\omega) = \frac{e^{-x_0}}{\operatorname{ch} x_0 + i \operatorname{sh} x_0 \frac{\omega}{b}}, \quad (32)$$

$$E = b (\operatorname{cth} 2x_0 - 1), \quad (33)$$

$$\Delta^2 = \frac{a^2}{2} (1 - e^{-2x_0}). \quad (34)$$

Z drugiej strony, dla przypadku układu bez szumów $c=0$, a więc i $x_0=0$, uzyskujemy

$$K(i\omega) = \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b}} = \frac{be^{-x}}{b \operatorname{cth} x + i\omega}, \quad (35)$$

$$E = b(\operatorname{cth} 2x - 1), \quad (36)$$

$$\Delta^2 = \frac{a^2}{2} \operatorname{th} x. \quad (37)$$

Zatem optymalne charakterystyki (32) i (35) będą identyczne, jeśli $x=x_0$. Ponieważ jednak x jest określone przez E, x_0 — przez c , optymalna charakterystyka układu przy zadanym E jest identyczna z optymalną charakterystyką konieczną do filtracji szumu o gęstości widmowej

$$S_z(\omega) = c^2 = \frac{a^2}{b} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \operatorname{arc th} \left(1 + \frac{E}{b} \right).$$

Błędy Δ^2 są jednak różne w rozważanych dwóch przypadkach (poza przypadkiem $x_0=0$, a więc $c=0$).

Jak wynika z rys. 3, w przypadku niewielkiego poziomu szumów ($\frac{c^2}{a^2} b \approx 0$), optymalna charakterystyka amplitudy układu

$$|K(i\omega)|^2 = \left| \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x + i \operatorname{sh} x \frac{\omega}{b}} \right|^2,$$

powinna obejmować możliwie duże pole dla zapewnienia małych zniekształceń $\frac{\Delta^2}{a^2}$. Jedynym ograniczeniem są tu więc warunki konstrukcyjne, od których zależy wielkość E .

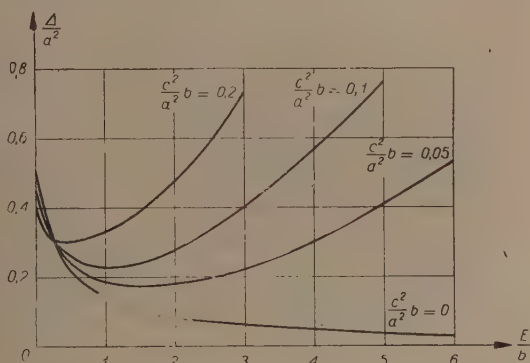
Przy większym poziomie szumów warunek (13) staje się nieistotny, gdyż dla zrealizowania optymalnej charakterystyki wystarcza zużytkowanie mniejszej ilości środków technicznych, a ograniczenie ze względu na E odpada.

Z rys. 3 widzimy ponadto, że zniekształcenia $\frac{\Delta^2}{a^2}$ zależą od stosunku $\frac{E}{b}$, a więc dla zmniejszenia tych zniekształceń należy powiększyć E oraz zmniejszyć ilość zmian sygnału w jednostce czasu b , co jest jednak związane z koniecznością powiększenia pasma częstotliwości układu oraz ze stratą informacji sygnału przekazywanego przez układ.

Impulsowa funkcja przejściowa $k(t)$ odpowiadająca (35) wyraża się następująco

$$k(t) = \frac{b}{\operatorname{sh} x} e^{-x} e^{-b \operatorname{cth} x \cdot t} \quad (38)$$

Funkcja zaś przejściowa $h(t)$, odpowiadająca włączeniu na wejściu układu sygnału jednostkowego Heaviside'a, posiada postać analogiczną do



Rys. 3. Wykres funkcji $\frac{\Delta^2}{a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \operatorname{sh}^2 x_0 (\operatorname{cth} 2x - 1)$

przy $\operatorname{sh}^2 x_0 = \operatorname{const}$, gdzie $x = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{2b}{E} \right)$,

$$\operatorname{sh}^2 x_0 = \frac{c^2}{a^2} - b.$$

uzyskanej w pracy [2], gdzie wyznaczono optymalne $h(t)$ ze względu na minimalne zniekształcenia kwadratowe sygnału jednostkowego przy warunku dodatkowym (13).

Wynik ten nie jest przypadkowy, gdyż zagadnienie rozpatrywane w niniejszej pracy jest uogólnieniem pracy [2] na szerszą klasę sygnałów przekazywanych przez układ.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej PAN
Instytut Fizyki PAN

WYKAZ LITERATURY

1. Kołmogorow A. N. — Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen. Bulletin de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. ser. Math. 5, 1941.
2. Kulikowski R., Plebański J. — Optymalne charakterystyki częstotliwościowe liniowych układów dynamicznych. Archiwum Elektrotechniki, zeszyt 2, tom IV, 1955.

3. Rice S. O. — Mathematical analysis of random noise. B.S.T.J., t. 23, nr 3, 1944.
4. Sołodownikow W. W. — Wwiedienije w statisticzeskiju dinamiku sistiem awtomaticzeskogo uprawlenija. GITTL, 1952.
5. Wiener N. — Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. MIT, 1950.

Р. КУЛИКОВСКИ и Г. ПЛЕБАНЬСКИ

МИНИМАЛЬНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА В СИСТЕМАХ С НЕБОЛЬШИМ УРОВНЕМ ШУМОВ

Резюме

В настоящей работе определяется характеристики $k(t)$ линейной системы, представленной на рис. 1, соответствующие минимальным искажениям:

$$\overline{I^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ x(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-\tau) k(\tau) d\tau \right\}^2 dt \quad (1)$$

при условии, что уровень шумов $z(t)$ небольшой.

В случае когда спектральная плотность шумов равна нулю, решение указанное Винером [5] соответствует системе, для которой амплитудная характеристика $A(\omega) = \text{const}$ в бесконечной полосе частот. Однако в реальных системах амплитудная характеристика ограничивает конечную площадь. Поэтому минимум функционала (1) находится при добавочном условии

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} k^2(t) dt = \varepsilon. \quad (10)$$

Величина ε зависит от факторов конструктивного порядка (например — обратной связи, схем коррекции) и определяет энергию шума на выходе системы в случае „белого шума“ на входе.

Поставленная задача является изопериметрической вариационной задачей. Уравнение Ейлера — Лагранжа, которое соответствует этой задаче, имеет следующий вид:

$$R_{xe}(\tau) - \mu k(\tau) - \int_0^{\infty} R_e(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0, \quad (12)$$

где R_{xe} , R_e функции корреляции, μ множитель Лагранжа. Из уравнения (12) находится экстремалью $k(\tau)$, которая параметрически зависит от μ . Подставляя эту функцию в уравнение (10) находится $\mu(\varepsilon)$.

Решение уравнения (12) выражается:

$$K(i\omega) = \frac{1}{2\pi \overline{\Psi}_1(i\omega)} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{xe}(\omega')}{\overline{\Psi}_2(i\omega')} e^{i\omega' t} d\omega', \quad (18)$$

где

$$\overline{\Psi}_1(i\omega) \cdot \overline{\Psi}_2(i\omega) = S_e(\omega) + \mu,$$

при чём

¹ $x(t)$ является линейным функционалом входного сигнала $s(t)$ которого функция корреляции $R_x(\tau)$ считается заданной, $e(t) = s(t) + z(t)$.

$\bar{\Psi}_1(i\omega)$ — функция аналитическая и ограниченная в нижней полуплоскости,
 $\bar{\Psi}_2(i\omega)$ — функция аналитическая и ограниченная в верхней полуплоскости,
 S_e, S_{xe} — спектральные плоскости соответствующие функциям корреляции R_e, R_{xe} .
 В качестве примера определено характеристики системы, на которую воздействует телеграфный сигнал (рис. 2), который обладает спектральной плотностью (26).
 График искажений \bar{I}^2 при заданном ε представлен на рис. 3.

R. KULIKOWSKI, J. PLEBAŃSKI

MINIMUM STOCHASTIC SIGNAL DISTORTIONS IN LOW NOISE LEVEL CIRCUITS

Summary

In this paper linear circuit characteristics $k(t)$ shown in fig. 1 are determined. They correspond to the minimum mean-square distortion:

$$\bar{I}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ x(t) - \int_0^{\infty} e(t-\tau) k(\tau) d\tau \right\}^2 dt \quad (1)$$

at a low noise level $z(t)$, where $x(t)$ being a linear functional of useful signal $s(t)$ of a given correlation $R_x(\tau)$, $e(t) = s(t) + z(t)$.

In Wiener's solution [5], when the noise spectrum density equals zero, the optimum transient function of the circuits is $k(t) = \delta(t)$, which corresponds to the allpassing circuits i. e. the amplitude characteristic $A(\omega) = \text{const}$.

As in real circuits the amplitude characteristic restricts a limited area, the function (1) is found for the additional condition

$$\int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \pi \int_0^{\infty} k^2(t) dt = \varepsilon \quad (10)$$

i. e. under the assumption, that the amplitude characteristics $A(\omega)$ restricts a limited area. The magnitude of this area depends upon the design possibilities when designing the circuit and defines the noise energy at the output of the circuit with the „white noise“ at its input.

This is a variational problem of isoperimetrical type and its Euler-Lagrange equation has the form

$$R_{xe}(\tau) - \mu k(\tau) - \int_0^{\infty} R_e(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0, \quad \tau > 0, \quad (12)$$

where R_{xe}, R_e are correlation functions, μ — Lagrange multiplier.

Using equation (12) we can determine the extreme function $k(\tau)$, depending parametrically on μ . Putting this function in (10) we can find μ as a function of ε .

The solution of equation (12) is

$$K(i\omega) = \frac{1}{2\pi \bar{\Psi}_1(i\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{xe}(\omega')}{\bar{\Psi}_2(i\omega')} e^{i\omega' t} d\omega' \quad (18)$$

where

$$\bar{\Psi}_1(i\omega) \cdot \bar{\Psi}_2(i\omega) = S_e(\omega) + \mu.$$

The notation used in the above:

$\bar{\Psi}_1(i\omega)$ — analytical function limited in the low surface ω ,

$\bar{\Psi}_2(i\omega)$ — analytical function limited in the upper surface ω ,

S_e, S_{xe} — spectrum densities corresponding to the correlation function R_e, R_{xe} .

As an example optimum characteristics of a circuit, acted upon by a stochastic telegraphic signal (fig. 2) of a spectrum density (26) have been determined.

Fig. 3 shows the graph of the error I^2 accordingly to equation (10).

621.3.025.3:512.8

T. CHOLEWICKI

Metody oczkowe i węzłowe w macierzach składowych symetrycznych

Rękopis dostarczono 3. 11. 1954.

Po przypomnieniu zasadniczych wzorów odnoszących się do obwodu trójfazowego czteroprzewodowego, badanego w stanie ustalonym za pomocą składowych symetrycznych w przypadku występowania sprzężeń indukcyjnych międzyfazowych, autor rozszerza zagadnienie na przypadek istnienia sprzężeń indukcyjnych zarówno między fazami, jak i z przewodem neutralnym. Zastosowanie rachunku macierzowego korzystnie wpływa na przejrzystość dokonywanych obliczeń i ich prostotę.

Sprzężeniom indukcyjnym między gałęziami można podporządkować sprzężenia pojemnościowe występujące między węzłami układu, przy czym istnieją odpowiednie analogie między macierzami impedancji przy sprzężeniach indukcyjnych, a macierzami admitancji przy sprzężeniach pojemnościowych.

Ostatnia część pracy jest poświęcona sprawie istnienia pewnych ograniczeń w stosowaniu zasady dwoistości w elektrotechnice. Zestawiając ze sobą obwody n -oczkowe z obwodami $(n+1)$ -węzłowymi i metodę prądów cyklicznych z metodą potencjałów węzłowych autor dochodzi do wniosku, że nie wszystkie rozumowania dotyczące obu obwodów i metod wykazują cechy odpowiedniości.

W szczególności liczba możliwych różnych sposobów rozwiązywania porównywanych obwodów i liczba różnych odpowiednich macierzy impedancyjnych oraz admitancyjnych są zupełnie różne dla obwodów oczkowych i obwodów węzłowych i są przykładem rozumowania, w którym trudno byłoby już mówić o dualizmie.

1. PRZEDMIOT PRACY

Rachunek macierzy pozwala w łatwy sposób wyprowadzić w układzie odniesienia składowych symetrycznych prawo Ohma i drugie prawo Kirchhoffa dla układu trójfazowego o fazach ekranowanych oraz dla układu trójfazowego o fazach indukcyjnie sprzężonych [2], [4], [7]. Przy rozpatrywaniu składowych symetrycznych jako zaletę rachunku macierzy w porównaniu z obliczeniami niemacierzowymi można wymienić, że

1. zamiast znanej uciążliwości obliczeń niemacierzowych mamy krótkie i nieskomplikowane przekształcenia macierzowe,

2. w związku z wydzieleniem macierzy kwadratowej stopnia trzeciego — impedancji względnie admitancji — w osobny człon, równania macierzowe są przejrzyste i łatwe do zapamiętania,
3. w przypadku ekranowania faz macierze impedancji i admitancji, występujące w prawie Ohma lub w drugim prawie Kirchhofa w układzie odniesienia składowych symetrycznych, są nawzajem swymi odwrotnościami, czego przy użyciu rachunku macierzy można łatwo dowieść. Omawiana zależność $\mathbf{y}=\mathbf{z}^{-1}$ nie dająca się wyrazić w algebrze niemacierzowej ma swój sens elektryczny i rozszerza nasz zakres wiedzy o obwodzie trójfazowym.

Prowadząc rozumowania w założeniu, że napięcia źródłowe i odbiornikowe oraz prądy przewodowe mają przebieg sinusoidalny, a rozpatrywane obwody są liniowe i znajdują się w stanie ustalonym, możemy zasadnicze równania elektrotechniki w układzie odniesienia składowych symetrycznych zestawzić w postaci macierzowej w tablicy 1.

Tablica 1

Zasadnicze równania elektrotechniki w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Postać impedancyjna prawa Ohma przy fazach ekranowanych

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

czyli

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{z} \mathbf{J}_s, \quad (1.2)$$

gdzie

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Postać admitancyjna prawa Ohma przy fazach ekranowanych

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0, y_2, y_1 \\ y_1, y_0, y_2 \\ y_2, y_1, y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

czyli

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{y} \mathbf{U}_s, \quad (1.5)$$

gdzie

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0, y_2, y_1 \\ y_1, y_0, y_2 \\ y_2, y_1, y_0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Postać impedancyjna drugiego prawa Kirchhoffa przy fazach ekranowanych

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

czyli

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{z}_1 \mathbf{J}_s, \quad (1.8)$$

gdzie

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

d. c. tablicy 1

Postać admitancyjna drugiego prawa Kirchhoffa przy fazach ekranowanych

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

czyli

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{y}_1 \mathbf{E}_s, \quad (1.11)$$

gdzie

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Postać impedancyjna prawa Ohma przy fazach indukcyjnie sprzężonych

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

czyli

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{z}_2 \mathbf{J}_s, \quad (1.14)$$

gdzie

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Postać impedancyjna drugiego prawa Kirchhoffa przy fazach indukcyjnie sprzężonych

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} + 3Z_n, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

czyli

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{z}_3 \mathbf{J}_s, \quad (1.17)$$

gdzie

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} + 3Z_n, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Przedstawione macierze impedancji \mathbf{z} , \mathbf{z}_1 , \mathbf{z}_2 , \mathbf{z}_3 włązą się logicznie ze sobą, gdyż

przy przewodzie neutralnym bezimpedancyjnym $Z_n = 0$ macierz \mathbf{z}_1 , upraszcza się do \mathbf{z} , przy ekranowaniu magnetycznym faz również i macierz \mathbf{z}_2 upraszcza się do \mathbf{z} , przy przewodzie neutralnym bezimpedancyjnym $Z_n = 0$ macierz \mathbf{z}_3 upraszcza się do \mathbf{z}_2 , na koniec przy przewo-

dzie neutralnym bezimpedacyjnym $Z_n=0$ i przy ekranowaniu magnetycznym faz macierz \mathbf{z}_3 upraszcza się do \mathbf{z} .

Analogiczny związek zachodzi między macierzami admitancji, a mianowicie przy przewodzie neutralnym bezimpedacyjnym $Z_n=0$ mamy $Y_n \rightarrow \infty$, wobec czego macierz admitancji \mathbf{y}_1 upraszcza się do \mathbf{y} .

Rozszerzymy teraz zakres naszych rozważań i rozpatrzmy przypadek istnienia sprzężeń zarówno międzyfazowych, jak i przewodem neutralnym oraz oprócz dotychczas omawianych sprzężeń indukcyjnych — również i sprzężeń pojemnościowych. W szczególności określimy postać matematyczną i znaczenie elektryczne macierzy admitancji \mathbf{y}_2 i \mathbf{y}_3 będących odpowiednikiem macierzy impedancji \mathbf{z}_2 i \mathbf{z}_3 . Zebrany materiał pozwoli nam na bliższe sprecyzowanie, czym jest zasada dwoistości w elektrotechnice i jakie są ograniczenia w jej stosowaniu.

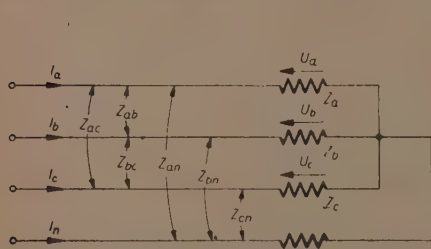
Omawiane w niniejszej pracy zagadnienia elektryczne oparte są zasadniczo na rachunku macierzy, ponadto zaś wykorzystane są pewne pojęcia z dziedziny topologii sieci i kombinatoryki.

Pod względem formalnym przyjęto w pracy terminologię: E jest to napięcie źródłowe, a U napięcie odbiornikowe w bilansie napięć, zwanym drugim prawem Kirchhoffa, nie korzysta się zaś z pojęcia siły elektrycznej. Zwroty wszelkich napięć: źródłowych i odbiornikowych przyjęto na rysunkach umownie w stronę wzrostu potencjału.

2. PRAWO OHMA NA ODBIORNIKU TRÓJFAZOWYM POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

przy fazach indukcyjnie sprzężonych między sobą oraz z przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrzmy odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, wskazany na rys. 1, o fazach indukcyjnie sprzężonych zarówno między sobą, jak i z przewodem neutralnym. W odbiorniku tym dany jest układ prądów przewo-



Rys. 1. Odbiornik trójfazowy ze sprzężeniami indukcyjnymi.

dowych ($\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$), układ impedancji poszczególnych gałęzi odbiornika ($\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$) oraz układy impedancji wzajemnych między fazami ($\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$) i między fazą a przewodem neutralnym ($\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn}$) na skutek istnienia sprzężeń indukcyjnych.

Przyjmujemy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani

też zwarcia, wobec czego układ impedancji ($\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$) jest układem operatorów wektorowych niezerowych i skończonych. O układach impedancji wzajemnych ($\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$) i ($\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn}$) nie czynimy żadnych spec-

jalnych założeń, wobec czego w przypadku szczególnym mogą to być układy operatorów wektorowych zerowych.

Zwrot prądu w przewodach fazowych i w przewodzie neutralnym przyjmujemy jednolicie ku odbiornikowi.

Zamierzamy wyrazić składowe symetryczne napięcia na odbiorniku za pomocą składowych symetrycznych prądu oraz składowych symetrycznych impedancji własnej faz i wzajemnej między fazami oraz między fazą, a przewodem neutralnym.

Wypisujemy równanie macierzowe napięć

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{an} \\ Z_{ba} & Z_b & Z_{bc} & Z_{bn} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_c & Z_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \\ J_n \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

i eliminujemy w nim prąd w przewodzie neutralnym za pomocą prądów fazowych

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a - Z_{an} & Z_{ab} - Z_{an} & Z_{ac} - Z_{an} \\ Z_{ba} - Z_{bn} & Z_b - Z_{bn} & Z_{bc} - Z_{bn} \\ Z_{ca} - Z_{cn} & Z_{cb} - Z_{cn} & Z_c - Z_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Uwzględniamy teraz, że impedancja wzajemna jest dla sprzężeń indukcyjnych symetryczna $\hat{Z}_{kl} = \hat{Z}_{lk}$ i rozkładając macierz impedancji w ostatnim równaniu na 3 składniki, przekształcamy je do postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & 0 & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_{an} & -Z_{an} & -Z_{an} \\ -Z_{bn} & -Z_{bn} & -Z_{bn} \\ -Z_{cn} & -Z_{cn} & -Z_{cn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & 0 & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Z_{an}(J_a + J_b + J_c) \\ -Z_{bn}(J_a + J_b + J_c) \\ -Z_{cn}(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' + \mathbf{U}'''. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Poszczególne składniki w tym równaniu mają następujące znaczenie fizyczne:

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix}$$

jest macierzą napięć w układzie trzech faz magnetycznie ekranowanych od siebie i od przewodu neutralnego,

$$\mathbf{U}'' = \begin{bmatrix} 0 & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & 0 & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix}$$

jest macierzą strat napięcia spowodowanych występowaniem sprzężeń indukcyjnych między fazami,

$$\mathbf{U}''' = \begin{bmatrix} -Z_{an}(J_a + J_b + J_c) \\ -Z_{bn}(J_a + J_b + J_c) \\ -Z_{cn}(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix}$$

jest macierzą strat napięcia spowodowanych występowaniem sprzężeń indukcyjnych poszczególnych faz z przewodem neutralnym.

Rozkładamy impedancję własną i impedancje wzajemne na składowe symetryczne

$$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{bc} \\ Z_{ac} \\ Z_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{m0} \\ z_{m1} \\ z_{m2} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{an} \\ Z_{bn} \\ Z_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{n0} \\ z_{n1} \\ z_{n2} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Oznaczając macierz operatorową składowych symetrycznych przez S , a macierz z nią sprzężoną przez S_1

$$S = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h, h^2 \\ 1, h^2, h \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

macierzom napięć (lub strat napięcia) U', U'', U''' i U możemy przyporządkować odpowiednie macierze składowych symetrycznych napięcia

$$\left. \begin{aligned} U'_s &= \frac{1}{3} S_1 U', \\ U''_s &= \frac{1}{3} S_1 U'', \\ U'''_s &= \frac{1}{3} S_1 U''', \\ U_s &= \frac{1}{3} S_1 U. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Dwie pierwsze z tych macierzy, jak wiadomo, wynoszą

$$U'_s = \begin{bmatrix} z_0, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$U''_s = \begin{bmatrix} 2z_{m0}, -z_{m2}, -z_{m1} \\ -z_{m1}, -z_{m0}, 2z_{m2} \\ -z_{m2}, 2z_{m1}, -z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

natomiast trzecią obliczamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s''' &= \begin{bmatrix} U_0''' \\ U_1''' \\ U_2''' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} U_a''' + U_b''' + U_c''' \\ U_a''' + h U_b''' + h^2 U_c''' \\ U_a''' + h^2 U_b''' + h U_c''' \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (Z_{an} + Z_{bn} + Z_{cn})(-1)(J_a + J_b + J_c) \\ (Z_{an} + h Z_{bn} + h^2 Z_{cn})(-1)(J_a + J_b + J_c) \\ (Z_{an} + h^2 Z_{bn} + h Z_{cn})(-1)(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3Z_{n0} J_0 \\ -3Z_{n1} J_0 \\ -3Z_{n2} J_0 \end{bmatrix}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy dla składowych symetrycznych napięcia równania macierzowe

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} - 3z_{n0} & z_2 - z_{m2} & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} & z_0 - z_{m0} & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 + 2z_{m1} & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

które wyraża prawo Ohma w postaci impedancyjnej dla odbiornika trójfazowego o fazach indukcyjnie sprzężonych między sobą i z przewodem neutralnym w układzie odniesienia składowych symetrycznych.

Prawo to możemy w skróceniu zapisać w postaci

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{z}_4 \mathbf{J}_s, \quad (2.13)$$

gdzie przez macierz impedancji \mathbf{z}_4 rozumiemy macierz

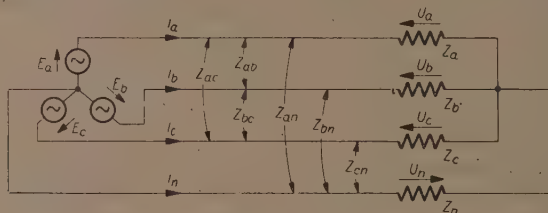
$$\mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} - 3z_{n0} & z_2 - z_{m2} & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} & z_0 - z_{m0} & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 + 2z_{m1} & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Macierz \mathbf{z}_4 jest uogólnieniem rozpatrywanych poprzednio macierzy \mathbf{z} i \mathbf{z}_2 , bo gdy spowodujemy ekranowanie magnetyczne faz od przewodu neutralnego, to układ operatorów wektorowych $(\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn})$ staje się układem operatorów wektorowych zerowych i w konsekwencji układ składowych symetrycznych $(\hat{z}_{n0}, \hat{z}_{n1}, \hat{z}_{n2})$ staje się też układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz \mathbf{z}_4 upraszcza się do \mathbf{z}_2 . Gdy zaś spowodujemy ekranowanie magnetyczne faz zarówno od przewodu neutralnego, jak i od siebie, to i drugi układ operatorów wektorowych $(\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab})$ staje się układem operatorów wektorowych zerowych, a wskutek tego macierz \mathbf{z}_4 upraszcza się do \mathbf{z} .

3. DRUGIE PRAWO KIRCHHOFFA W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM CZTEROPRZEWODOWYM

przy fazach odbiornika indukcyjnie sprzężonych między sobą oraz z przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrzmy układ trójfazowy czteroprzewodowy, wskazany na rys. 2, o fazach odbiornika indukcyjnie sprzężonych zarówno między sobą, jak i z przewodem neutralnym. Jak zwykle w tego rodzaju zagadnieniach zakładamy, że impedancja wewnętrzna źródła napięcia i impedancja prze-



Rys. 2. Układ trójfazowy ze sprzężeniami indukcyjnymi.

wodów łączących źródło z odbiornikiem są włączone do impedancji odpowiedniej fazy odbiornika, wobec czego źródło i przewody łączące można już uważać za bezimpedancyjne.

Niech będzie dany układ prądów przewodowych ($\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$), układ impedancji poszczególnych gałęzi odbiornika ($\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$), impedancja przewodu neutralnego \hat{Z}_n , układ impedancji wzajemnych między fazami ($\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$) i między fazą a przewodem neutralnym ($\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn}$) na skutek istnienia sprzężeń indukcyjnych.

Przyjmujemy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani też zwarcia, wobec czego układ impedancji ($\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$) jest układem operatorów wektorowych niezerowych i skończonych. Nie czynimy natomiast żadnych założeń o impedancji przewodu neutralnego \hat{Z}_n , ani też o układach impedancji wzajemnych ($\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$) i ($\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn}$) wobec czego w przypadku szczególnym impedancja \hat{Z}_n oraz wspomniane impedancje wzajemne mogą być równe zeru.

Zwrot prądu w przewodach fazowych i przewodzie neutralnym przyjmujemy jednolicie ku odbiornikowi.

Zamierzamy wyrazić składowe symetryczne napięcia źródłowego za pomocą składowych symetrycznych prądu oraz składowych symetrycznych impedancji własnej fazy, impedancji wzajemnej między fazami oraz impedancji wzajemnej między fazami a przewodem neutralnym.

Napięcie punktu neutralnego odbiornika względem punktu neutralnego źródła przy ekranowaniu magnetycznym przewodu neutralnego wyniosłoby

$$\hat{U}_n = \hat{Z}_n (-\hat{J}_n) = -\hat{Z}_n \hat{J}_n, \quad (3.1)$$

w naszym przypadku zaś przy występowaniu sprzężeń indukcyjnych, napięcie to wynosi

$$\begin{aligned} U_n &= -(\hat{Z}_{na} \hat{J}_a + \hat{Z}_{nb} \hat{J}_b + \hat{Z}_{nc} \hat{J}_c + \hat{Z}_n \hat{J}_n) = \\ &= \hat{Z}_n (\hat{J}_a + \hat{J}_b + \hat{J}_c) - (\hat{Z}_{na} \hat{J}_a + \hat{Z}_{nb} \hat{J}_b + \hat{Z}_{nc} \hat{J}_c). \end{aligned} \quad (3.2)$$

W równaniu macierzowym napięć

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

czyli w skróceniu pisząc

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} + \mathbf{U}_n, \quad (3.4)$$

oznaczamy, jak poprzednio, macierz napięć fazowych

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' + \mathbf{U}''' \quad (3.5)$$

Pozostała macierz napięć w przewodzie neutralnym wynosi

$$\mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \\ -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \\ -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

i składa się z dwóch składników:

macierzy napięć w przewodzie neutralnym przy jego ekranowaniu magnetycznym

$$\mathbf{U}^{IV} = \begin{bmatrix} Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

i macierzy strat napięcia w przewodzie neutralnym spowodowanych sprzężeniami indukcyjnymi z poszczególnymi fazami

$$\mathbf{U}^V = \begin{bmatrix} -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \\ -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \\ -(Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Ostatnie dwie macierze składają się z jednakowych elementów, czyli są układami symetrycznymi zerowymi. Macierze składowych symetrycznych napięcia wynoszą dla nich odpowiednio

$$\mathbf{U}_s^{IV} = \begin{bmatrix} 3Z_n J_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3Z_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

oraz

$$\mathbf{U}_s^V = - \begin{bmatrix} Z_{na} J_a + Z_{nb} J_b + Z_{nc} J_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Z matematycznej teorii składowych symetrycznych [2] wiadomo, że macierz \mathbf{U}_s^V przekształca się do postaci

$$\mathbf{U}_s^V = -3 \begin{bmatrix} z_{n0} J_0 + z_{n2} J_1 + z_{n1} J_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3z_{n0} & -3z_{n2} & -3z_{n1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Ostatecznie więc, dla macierzy składowych symetrycznych napięcia źródłowego, otrzymujemy następujące równanie:

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{U}_s' + \mathbf{U}_s'' + \mathbf{U}_s''' + \mathbf{U}_s^{IV} + \mathbf{U}_s^V, \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2(z_{m0} - 3z_{n0}) + 3Z_n & z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} \\ z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} & z_0 - z_{m0} & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 + 2z_{m1} & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Równanie to przedstawia drugie prawo Kirchhoffa w postaci impedancyjnej dla układu trójfazowego czteroprzewodowego połączonego w gwiazdę, o fazach indukcyjnie sprzężonych między sobą i z przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych.

Równanie to można zapisać w skróceniu

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{z}_5 \mathbf{J}_s, \quad (3.14)$$

gdzie macierz impedancji wynosi

$$\mathbf{z}_5 = \begin{bmatrix} z_0 + 2(z_{m0} - 3z_{n0}) + 3Z_n & z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} \\ z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} & z_0 - z_{m0} & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & z_1 + 2z_{m1} & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Macierz \mathbf{z}_5 jest uogólnieniem rozpatrywanych poprzednio macierzy \mathbf{z}_1 i \mathbf{z}_3 , bo gdy spowodujemy ekranowanie magnetyczne faz od przewodu neutralnego, to układ operatorów wektorowych $(\hat{Z}_{an}, \hat{Z}_{bn}, \hat{Z}_{cn})$ staje się układem operatorów wektorowych zerowych i w konsekwencji układ składowych symetrycznych $(\hat{z}_{n0}, \hat{z}_{n1}, \hat{z}_{n2})$ staje się też układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz \mathbf{z}_5 upraszcza się do \mathbf{z}_3 . Gdy zaś spowodujemy ekranowanie magnetyczne faz zarówno od przewodu neutralnego, jak i od siebie, to i drugi układ operatorów wektorowych $(\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab})$ staje się układem operatorów wektorowych zerowych, wobec czego macierz \mathbf{z}_5 upraszcza się do \mathbf{z}_1 .

Zestawiając ze sobą macierz impedancji

z oraz z_1 ,

z_2 oraz z_3 ,

z_4 oraz z_5 ,

widzimy, że ich wiersze drugie i trzecie są jednakowe, co innymi słowy oznacza, że składowa dodatnia i składowa ujemna napięcia odbiornikowego są równe odpowiednim składowym symetrycznym napięcia źródłowego.

Wiersze pierwsze tych macierzy różnią się natomiast o elementy $3Z_n$, 0, 0 w przypadku macierzy z_1 i z_3 oraz o elementy $-3z_{n0} + 3Z_n$, $-3z_{n2}$, $-3z_{n1}$ w przypadku macierzy z_5 . Jest to zgodne z drugim prawem Kirchhoffa mającym w ogólnym przypadku postać

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 + U_n \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

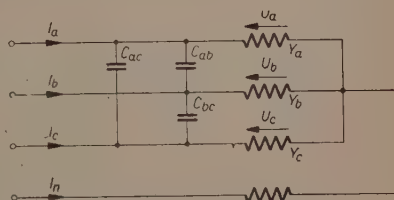
4. PRAWO OHMA NA ODBIORNIKU TRÓJFAZOWYM POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

przy fazach pojemnościowo sprzężonych między sobą, w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrzmy odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, wskazany na rys. 3, o fazach pojemnościowo sprzężonych między sobą.

W odbiorniku tym dany jest układ napięć odbiornikowych ($U_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c$), układ admitancji poszczególnych gałęzi odbiornika ($\hat{Y}_a, Y_b, \hat{Y}_c$), układ pojemności między poszczególnymi fazami (C_{bc}, C_{ac}, C_{ab}) i pulsacja ω .

Zakładamy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani też zwarcia, wobec czego układ admitancji ($\hat{Y}_a, \hat{Y}_b, \hat{Y}_c$) jest układem operatorów wektorowych niezerowych i skończonych. O układzie pojemności międzyfazowych nie czynimy żadnych specjalnych założeń, wobec czego w przypadku szczególnym może to być układ 3 wielkości fizycznych zerowych, co odpowiada ekranowaniu elektrostatycznemu faz od siebie.



Rys. 3. Odbiornik trójfazowy ze sprzężeniami pojemnościowymi.

Zwrot prądu w przewodach fazowych i w przewodzie neutralnym przyjmujemy jednolicie ku odbiornikowi.

Zamiarem naszym jest wyrażenie składowych symetrycznych prądu przewodowego za pomocą składowych symetrycznych napięcia odbiornikowego oraz składowych symetrycznych admitancji własnej i wzajemnej.

Oznaczmy admitancje poszczególnych gałęzi odpowiednio przez \hat{Y}_a, \hat{Y}_b i \hat{Y}_c admitancje własne węzłów a, b i c przez $\hat{Y}_{aa}, \hat{Y}_{bb}, \hat{Y}_{cc}$ oraz admitancje wzajemne między tymi węzłami przez $\hat{Y}_{bc}, \hat{Y}_{ac}$ i \hat{Y}_{ab} ; wielkości te są określone za pomocą następujących równań:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y}_a &= \frac{1}{\hat{Z}_a}, \\ \hat{Y}_{ab} &= -j\omega C_{ab}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\hat{Y}_{aa} = \hat{Y}_a + j\omega C_{ab} + j\omega C_{ac} = \hat{Y}_a - \hat{Y}_{ab} - \hat{Y}_{ac}, \quad (4.2)$$

Metoda węzłowa daje nam równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a + j\omega C_{ab} + j\omega C_{ac} & -j\omega C_{ab} & -j\omega C_{ac} \\ -j\omega C_{ab} & Y_b + j\omega C_{bc} + j\omega C_{ab} & -j\omega C_{bc} \\ -j\omega C_{ac} & -j\omega C_{bc} & Y_c + j\omega C_{ac} + j\omega C_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

które możemy napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ab} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ac} & Y_{bc} & Y_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Analogicznie jak w przypadku metody oczkowej rozkładamy admitancję gałęzi, admitancję własną węzłów i admitancję wzajemną węzłów na składowe symetryczne

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{aa} \\ Y_{bb} \\ Y_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{11} \\ y_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{bc} \\ Y_{ac} \\ Y_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{c0} \\ y_{c1} \\ y_{c2} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

i drogą tych samych obliczeń, co w przypadku równań (1.13) oraz (1.14), dochodzimy do zależności

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0}, & y_{22} - y_{c2}, & y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1}, & y_{00} - y_{c0}, & y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2}, & y_{11} + 2y_{c1}, & y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

czyli

$$J_s = y_2 U_s. \quad (4.9)$$

Równanie to przedstawia prawo Ohma w postaci admitancyjnej dla odbiornika trójfazowego o fazach pojemnościowo sprzężonych, w układzie odniesienia składowych symetrycznych.

Przez macierz admitancji y_2 rozumiemy w tym równaniu macierz

$$y_2 = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0}, & y_{22} - y_{c2}, & y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1}, & y_{00} - y_{c0}, & y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2}, & y_{11} + 2y_{c1}, & y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Macierz admitancji y_2 jest uogólnieniem rozpatrywanej poprzednio macierzy y , bo gdy spowodujemy ekranowanie elektrostatyczne faz od siebie, to układ operatorów wektorowych (\hat{Y}_{bc} , \hat{Y}_{ac} , \hat{Y}_{ab}) staje się układem operatorów wektorowych zerowych, w konsekwencji układ składowych symetrycznych (\hat{y}_{c0} , \hat{y}_{c1} , \hat{y}_{c2}) staje się też układem operatorów wektorowych

zerowych i macierz $\begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{11} \\ y_{22} \end{bmatrix}$ upraszcza się do $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, a macierz y_2 do y .

Macierz admitancji y_2 możemy także wyrazić w innej postaci, a mianowicie uzależnić ją nie od składowych symetrycznych admitancji własnej węzłów, lecz od składowych symetrycznych admitancji poszczególnych gałęzi odbiornika.

Oznaczmy dla uproszczenia:

admitację wzajemną węzłów \hat{Y}_{bc} (brak pierwszego wskaźnika a) przez \hat{Y}' ,

„ „ „ \hat{Y}_{ac} (brak drugiego wskaźnika b) przez \hat{Y}'' ,

„ „ „ \hat{Y}_{ab} (brak trzeciego wskaźnika c) przez \hat{Y}''' ,

i dokonujemy przekształcenia

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{11} \\ y_{22} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h, h^2 \\ 1, h^2, h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_a - Y_{ab} - Y_{ac} \\ Y_b - Y_{bc} - Y_{ab} \\ Y_c - Y_{ac} - Y_{bc} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h, h^2 \\ 1, h^2, h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_c \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h, h^2 \\ 1, h^2, h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y'' + Y''' \\ Y''' + Y' \\ Y' + Y'' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(Y' + Y'' + Y''') \\ -(Y' + hY'' + h^2Y''') \\ -(Y' + h^2Y'' + hY''') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - 2y_{c0} \\ y_1 + y_{c1} \\ y_2 + y_{c2} \end{bmatrix}. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Stosownie do tego przekształcenia, macierzy (4.10) możemy nadać postać

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 - 3y_{c0} & y_2 + 3y_{c2} \\ y_2 & y_1 + 3y_{c1} & y_0 - 3y_{c0} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

a prawo Ohma napisać następująco:

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 - 3y_{c0} & y_2 + 3y_{c2} \\ y_2 & y_1 + 3y_{c1} & y_0 - 3y_{c0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3y_{c0} & 3y_{c2} \\ 0 & 3y_{c1} & -3y_{c0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

czyli w skróceniu

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}'_s + \mathbf{J}''_s. \quad (4.14)$$

W ten sposób macierz prądów występująca w przypadku ekranowania elektrostatycznego faz

$$\mathbf{J}'_s = \begin{bmatrix} y_0 U_0 + y_2 U_1 + y_1 U_2 \\ y_1 U_0 + y_0 U_1 + y_2 U_2 \\ y_2 U_0 + y_1 U_1 + y_0 U_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

została powiększona na skutek istnienia sprzężeń pojemnościowych między fazami o macierz

$$\mathbf{J}''_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -3y_{c0} U_1 + 3y_{c2} U_2 \\ 3y_{c1} U_1 - 3y_{c0} U_2 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

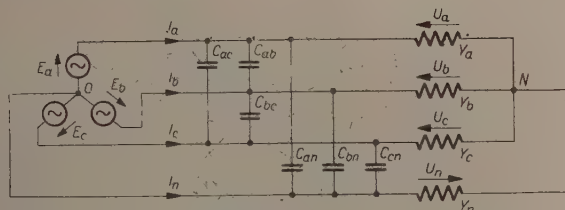
W macierzy \mathbf{J}''_s nie występuje składowa zerowa prądu. Fizycznie odpowiada temu okoliczność, że 3 kondensatory C_{bc} , C_{ac} i C_{ab} tworzą odbiornik połączony w trójkąt, w którym — jak wiadomo — może krążyć składowa zerowa prądu, ale nie może wyjść na linię.

Macierz admitancji \mathbf{y}_2 , można zatem przedstawić w dwóch równoważnych postaciach. Postać (4.10) jest dogodniejsza, gdy chodzi o zagadnienie dualizmu między sprzężeniami indukcyjnymi, a pojemnościowymi i stąd między macierzami impedancji \mathbf{z}_2 oraz admitancji \mathbf{y}_2 . Postaci (4.12) używamy natomiast, gdy chcemy porównać prawo Ohma w postaci admitancyjnej przy ekranowaniu elektrostatycznym faz (4.15) z tymże prawem przy pojemnościowym sprzężeniu faz (4.13) i stwierdzić, które elementy macierzy admitancji \mathbf{y} zmieniają się na skutek powstania sprzężeń.

5. DRUGIE PRAWO KIRCHHOFFA W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM CZTEROPRZEWODOWYM

przy fazach odbiornika pojemnościowo sprzężonych między sobą oraz z przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrzmy układ trójfazowy czteroprzewodowy, wskazany na rys. 4, o fazach odbiornika pojemnościowo sprzężonych zarówno między sobą, jak i z przewodem neutralnym.



Rys. 4. Układ trójfazowy ze sprzężeniami pojemnościowymi.

Niech będzie dany układ napięć źródłowych fazowych ($\hat{E}_a, \hat{E}_b, \hat{E}_c$), układ admitancji poszczególnych gałęzi odbiornika ($\hat{Y}_a, \hat{Y}_b, \hat{Y}_c$), admitancja przewodu neutralnego \hat{Y}_n , układ pojemności między fazami (C_{bc}, C_{ac}, C_{ab}) i między fazą a przewodem neutralnym (C_{an}, C_{bn}, C_{cn}) na skutek istnienia sprzężeń pojemnościowych i pulsacja ω .

Przyjmujemy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani też zwarcia, wobec czego układ admitancji ($\hat{Y}_a, \hat{Y}_b, \hat{Y}_c$) jest układem operatorów wektorowych niezerowych i skończonych. Nie czynimy natomiast żadnych założeń o admitancji przewodu neutralnego \hat{Y}_n , ani też o układach pojemności wzajemnych (C_{bc}, C_{ac}, C_{ab}) i (C_{an}, C_{bn}, C_{cn}) wobec czego w przypadku szczególnym pojemności te mogą być zerowe, a admitancja \hat{Y}_n może dążyć do nieskończoności albo do zera.

Zwrot prądu w przewodach fazowych i w przewodzie neutralnym przyjmujemy jednolicie ku odbiornikowi.

Zamiarem naszym jest wyrazić składowe symetryczne prądu za pomocą składowych symetrycznych napięć źródłowych fazowych oraz składowych symetrycznych admitancji własnej fazy i wzajemnej między fazami oraz między fazą a przewodem neutralnym.

Oznaczamy układ napięć fazowych na odbiorniku przez ($\hat{U}_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c$) i stwierdzamy, że równanie macierzowe napięć w 3 oczkach sieci ma postać

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_a \\ \hat{E}_b \\ \hat{E}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_a \\ \hat{U}_b \\ \hat{U}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{U}_n \\ \hat{U}_n \\ \hat{U}_n \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

gdzie \hat{U}_n oznacza napięcie punktu neutralnego odbiornika względem punktu neutralnego źródła.

W przypadku ogólnym metoda węzłowa daje równanie prądów dla węzła A

$$\hat{J}_a = \hat{Y}_a \hat{U}_a + j\omega C_{ab}(\hat{U}_a - \hat{U}_b) + j\omega C_{ac}(\hat{U}_a - \hat{U}_c) + j\omega C_{an}(\hat{U}_a + \hat{U}_n), \quad (5.2)$$

skąd

$$\hat{J}_a = (\hat{Y}_a + j\omega C_{ab} + j\omega C_{ac} + j\omega C_{an}) \hat{E}_a - j\omega C_{ab} \hat{E}_b - j\omega C_{ac} \hat{E}_c - \hat{Y}_a \hat{U}_n \quad (5.3)$$

oraz dla węzła N

$$0 = \hat{Y}_a \hat{U}_a + \hat{Y}_b \hat{U}_b + \hat{Y}_c \hat{U}_c - \hat{Y}_n \hat{U}_n, \quad (5.4)$$

skąd

$$\hat{U}_n = \frac{\hat{Y}_a \hat{E}_a + \hat{Y}_b \hat{E}_b + \hat{Y}_c \hat{E}_c}{\hat{Y}_n + \hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} \quad (5.5)$$

Oznaczamy przez $\sum \hat{Y}$ sumę admitancji gałęzi zbiegający się w węzle N

$$\sum \hat{Y} = \hat{Y}_n + \hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c = \hat{Y}_n + 3\hat{y}_0. \quad (5.6)$$

Eliminujemy teraz z równania (5.3) napięcie \hat{U}_n w przewodzie neutralnym i otrzymujemy dla fazy a

$$\begin{aligned} \hat{J}_a = & \left(\hat{Y}_a + j\omega C_{ab} + j\omega C_{ac} + j\omega C_{an} - \frac{\hat{Y}_a}{\sum \hat{Y}} \hat{Y}_a \right) \hat{E}_a + \\ & + \left(-j\omega C_{ab} - \frac{\hat{Y}_a}{\sum \hat{Y}} \hat{Y}_b \right) \hat{E}_b + \left(-j\omega C_{ac} - \frac{\hat{Y}_a}{\sum \hat{Y}} \hat{Y}_c \right) \hat{E}_c. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Zachowując bez zmiany oznaczenia admitancji własnych i wzajemnych (4.2) z poprzedniego rozdziału i oznaczając analogicznie

$$\hat{Y}_{an} = -j\omega C_{an} \quad (5.8)$$

otrzymujemy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} - \frac{Y_a}{\sum Y} & Y_{ab} - \frac{Y_a}{\sum Y} & Y_{ac} - \frac{Y_a}{\sum Y} \\ Y_{ab} - \frac{Y_b}{\sum Y} & Y_{bb} - \frac{Y_b}{\sum Y} & Y_{bc} - \frac{Y_b}{\sum Y} \\ Y_{ac} - \frac{Y_c}{\sum Y} & Y_{bc} - \frac{Y_c}{\sum Y} & Y_{cc} - \frac{Y_c}{\sum Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Równanie to wyraża drugie prawo Kirchhoffa w postaci admitancyjnej dla układu trójfazowego czteroprzewodowego o sprzężeniach pojemnościowych, w zwykłym układzie odnie-

sienia napięć źródłowych fazowych i prądów przewodowych.

W celu wyrażenia tego prawa w układzie odniesienia składowych symetrycznych rozłożymy prawą stronę równania na 3 składniki

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa}, Y_{ab}, Y_{ac} \\ Y_{ab}, Y_{bb}, Y_{bc} \\ Y_{ac}, Y_{bc}, Y_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} + \frac{1}{\sum \hat{Y}} \begin{bmatrix} -Y_a(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \\ -Y_b(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \\ -Y_c(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -Y_{an} E_a \\ -Y_{bn} E_b \\ -Y_{cn} E_c \end{bmatrix} = \mathbf{J}' + \mathbf{J}'' + \mathbf{J}''' \quad (5.10)$$

Wprowadzimy jeszcze oznaczenia dla składowych symetrycznych admittancji wzajemnych między fazą, a przewodem neutralnym za pomocą równania analogicznego do (4.7)

$$\begin{bmatrix} Y_{an} \\ Y_{bn} \\ Y_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1, 1 \\ 1, h^2, h \\ 1, h, h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n0} \\ y_{n1} \\ y_{n2} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Macierz \mathbf{J}' rozkładamy na składowe symetryczne, jak w poprzednim rozdziale

$$\mathbf{J}'_s = \begin{bmatrix} J'_0 \\ J'_1 \\ J'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0}, y_{22} - y_{c2}, y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1}, y_{00} - y_{c0}, y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2}, y_{11} + 2y_{c1}, y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Obliczamy z kolei macierz \mathbf{J}''

$$\mathbf{J}''_s = \begin{bmatrix} J''_0 \\ J''_1 \\ J''_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3 \sum \hat{Y}} \begin{bmatrix} (Y_a + Y_b + Y_c)(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \\ (Y_a + h Y_b + h^2 Y_c)(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \\ (Y_a + h^2 Y_b + h Y_c)(Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c) \end{bmatrix} = -\frac{3}{\sum \hat{Y}} \begin{bmatrix} y_0(y_0 E_0 + y_2 E_1 + y_1 E_2) \\ y_1(y_0 E_0 + y_2 E_1 + y_1 E_2) \\ y_2(y_0 E_0 + y_2 E_1 + y_1 E_2) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

oraz macierz \mathbf{J}'''

$$\mathbf{J}'''_s = \begin{bmatrix} J'''_0 \\ J'''_1 \\ J'''_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} Y_{an} E_a + Y_{bn} E_b + Y_{cn} E_c \\ Y_{an} E_a + h Y_{bn} E_b + h^2 Y_{cn} E_c \\ Y_{an} E_a + h^2 Y_{bn} E_b + h Y_{cn} E_c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} y_{n0} E_0 + y_{n2} E_1 + y_{n1} E_2 \\ y_{n1} E_0 + y_{n0} E_1 + y_{n2} E_2 \\ y_{n2} E_0 + y_{n1} E_1 + y_{n0} E_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Dwie ostatnie macierze możemy traktować jako iloczyny pewnych macierzy kwadratowych admittancji przez macierz kolumnową napięć źródłowych

$$\mathbf{J}_s'' = -\frac{3}{\Sigma \hat{Y}} \begin{bmatrix} y_0 y_0, y_0 y_2, y_0 y_1 \\ y_0 y_1, y_1 y_2, y_1 y_1 \\ y_0 y_2, y_2 y_2, y_1 y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{J}_s''' = -\begin{bmatrix} y_{n0}, y_{n2}, y_{n1} \\ y_{n1}, y_{n0}, y_{n2} \\ y_{n2}, y_{n1}, y_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Sumując obliczone trzy macierze prądów ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_0^2}{Y_n + 3y_0}, y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, \\ y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0}, y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, \\ y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, y_{11} + 2y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

czyli

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{y}_5 \mathbf{E}_s. \quad (5.18)$$

Równanie to przedstawia drugie prawo Kirchhoffa w postaci admitancyjnej dla układu trójfazowego czteroprzewodowego o sprzężeniach pojemnościowych między fazami i między fazą a przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych.

Występującą w tym równaniu macierz admitancji

$$\mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_0^2}{Y_n + 3y_0}, y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, \\ y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0}, y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, \\ y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, y_{11} + 2y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0y_1}{Y_n + 3y_0} \\ y_{22} + 2y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

możemy przedstawić również, korzystając z równania (4.11), w postaci następującej:

$$y_5 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0} - y_{n0}, & -y_{n2} + \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & -y_{n1} + \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} - y_{n1}, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 + 3y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0} - y_{n2}, & y_1 + 3y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Rozpatrzmy teraz przypadki szczególne II prawa Kirchhoffa i macierzy admitancji y_5 .

W przypadku ekranowania elektrostatycznego faz od przewodu neutralnego, układ pojemności (C_{an} , C_{bn} , C_{cn}) jest układem wielkości fizycznych zerowych, skąd i układ składowych symetrycznych (\hat{y}_{n0} , \hat{y}_{n1} , \hat{y}_{n2}) jest układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz y_5 upraszcza się do postaci

$$y_5 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - 3y_{c0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 + 3y_{c2} - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 + 3y_{c1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - 3y_{c0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

W przypadku ekranowania elektrostatycznego faz zarówno od przewodu neutralnego, jak i od siebie, również i drugi układ pojemności (C_{bc} , C_{ac} , C_{ab}) staje się układem wielkości fizycznych zerowych, wobec czego i drugi układ składowych symetrycznych (\hat{y}_{c0} , \hat{y}_{c1} , \hat{y}_{c2}) jest układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz y_5 upraszcza się do macierzy y_1 znanej z rozdz. 1.

Rozpatrzmy z kolei układ, w którym impedancja \hat{Z}_n przewodu neutralnego jest zerem, czyli jego admitancja \hat{Y}_n dąży do nieskończoności.

Wszystkie 9 elementów o postaci ułamka typu $\frac{3y_0y_1}{Y_n+3y_0}$ w macierzy (5.19) staje się wtedy zerem, a macierz admitancji y_5 upraszcza się do postaci

$$y_4 = \begin{bmatrix} y_0 - y_{n0}, & y_2 - y_{n2}, & y_1 - y_{n1} \\ y_1 - y_{n1}, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0}, & y_2 + 3y_{c2} - y_{n2} \\ y_2 - y_{n2}, & y_1 + 3y_{c1} - y_{n1}, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Odpowiednie równanie

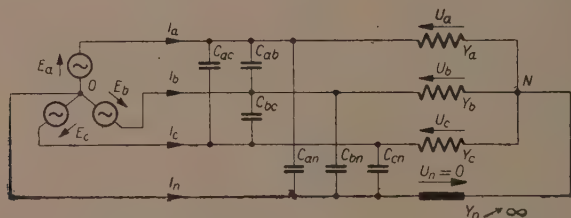
$$J_s = y_4 E_s \quad (5.23)$$

wyraża to samo co równanie

$$J_s = y_4 U_s, \quad (5.24)$$

które jest uogólnieniem równania (4.9) i przedstawia prawo Ohma w postaci admitancyjnej dla odbiornika trójfazowego o fazach pojemnościowo sprzężonych między sobą i z przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych.

Prawu Ohma odpowiada układ połączeń wskazany na rys. 5.



Rys. 5. Układ trójfazowy ze sprzężeniami pojemnościowymi przy zerowej impedancji przewodu neutralnego.

Zaznaczyć należy, że przy ekranowaniu elektrostatycznym faz od przewodu neutralnego macierz admitancji y_4 występująca w prawie Ohma upraszcza się do y_2 , a przy ekranowaniu elektrostatycznym faz zarówno od przewodu neutralnego, jak i od siebie macierz admitancji y_4 upraszcza się do y .

Rozpatrzmy na koniec układ, w którym impedancja przewodu neutralnego \hat{Z}_n dąży do nieskończoności, czyli jego admitancja \hat{Y}_n jest zerem.

W tym przypadku pozostają w mocy równania od (5.1) do (5.3), natomiast w dalszych — określających napięcie punktu neutralnego odbiornika

względem punktu neutralnego źródła i sumę admitancji zbiegających się w węzle N — zachodzą uproszczenia

$$\hat{U}_n = \frac{\hat{Y}_a \hat{E}_a + \hat{Y}_b \hat{E}_b + \hat{Y}_c \hat{E}_c}{\hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} \quad (5.25)$$

$$\sum \hat{Y} = \hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c = 3\hat{y}_0. \quad (5.26)$$

Uproszczenia te nie mają wpływu na macierze \mathbf{J}'_s i \mathbf{J}''_s , macierz prądów \mathbf{J}'''_s przybiera natomiast postać

$$\mathbf{J}''_s = - \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & \frac{y_1 y_2}{y_0} & \frac{y_1^2}{y_0} \\ y_2 & \frac{y_2^2}{y_0} & \frac{y_1 y_2}{y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Wobec tego drugie prawo Kirchhoffa w postaci admitancyjnej dla układu trójfazowego czteroprzewodowego o punkcie neutralnym izolowanym, o sprzężeniach pojemnościowych między fazami i między fazą a przewodem neutralnym, w układzie odniesienia składowych symetrycznych ma postać równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{n0}, & -y_{n2}, & -y_{n1} \\ -y_{n1}, y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{y_1 y_2}{y_0}, y_2 + 3y_{c2} - y_{n2} - \frac{y_1^2}{y_0} \\ -y_{n2}, y_1 + 3y_{c1} - y_{n1} - \frac{y_2^2}{y_0}, y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{y_1 y_2}{y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

czyli

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{y}'_5 \mathbf{E}_s \quad (5.29)$$

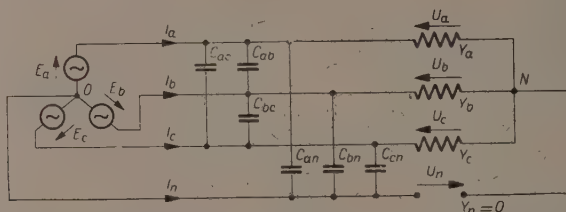
W równaniu tym występuje macierz admitancji

$$\mathbf{y}'_5 = \begin{bmatrix} -y_{n0}, & -y_{n2}, & -y_{n1} \\ -y_{n1}, y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{y_1 y_2}{y_0}, y_2 + 3y_{c2} - y_{n2} - \frac{y_1^2}{y_0} \\ -y_{n2}, y_1 + 3y_{c1} - y_{n1} - \frac{y_2^2}{y_0}, y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} - \frac{y_1 y_2}{y_0} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

która jest szczególnym przypadkiem macierzy \mathbf{y}_5 dla wartości $\hat{Y}_n = 0$; ponieważ przy obliczaniu w przypadku ogólnym macierzy \mathbf{y}_5 nie korzystaliśmy w przekształceniach pośrednich z mnożenia przez \hat{Y}_n , ani też z dzie-

lenia przez \hat{Y}_n , można było wypisać macierz y'_5 , wprost na podstawie znanej macierzy y_5 . Wobec tego kilka ostatnich równań, poczynając od (5.25), można traktować jako obliczenie kontrolne.

Drugiemu prawu Kirchhoffa, wyrażonemu przez równanie (5.28), odpowiada układ połączeń o zerowej admitancji przewodu neutralnego, wskazany na rys. 6.



Rys. 6. Układ trójfazowy ze sprzężeniami pojemnościowymi przy zerowej admitancji przewodu neutralnego.

W układzie tym, jedynym odbiornikiem którego punkt neutralny jest połączony z przewodem neutralnym, jest układ 3 pojemności między fazą, a przewodem neutralnym, wobec czego w pierwszym wierszu macierzy admitancji y'_5 występują wyłącznie elementy — y_{n0} , $-y_{n2}$, $-y_{n1}$.

Przy ekranowaniu elektrostatycznym faz od przewodu neutralnego macierz y'_5 staje się równa

$$y'_3 = \begin{bmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, y_0 - 3y_{c0} - \frac{y_1 y_2}{y_0}, y_2 + 3y_{c2} - \frac{y_1^2}{y_0} \\ 0, y_1 + 3y_{c1} - \frac{y_2^2}{y_0}, y_0 - 3y_{c0} - \frac{y_1 y_2}{y_0} \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

Macierz tę można też traktować jako przypadek szczególny macierzy y_3 przy zerowej admitancji przewodu neutralnego.

Na koniec przy ekranowaniu elektrostatycznym faz zarówno od przewodu neutralnego, jak i między sobą, macierz y'_5 staje się równa

$$y'_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, y_0 - \frac{y_1 y_2}{y_0}, y_2 - \frac{y_1^2}{y_0} \\ 0, y_1 - \frac{y_2^2}{y_0}, y_0 - \frac{y_1 y_2}{y_0} \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Macierz tę można z kolei traktować jako przypadek szczególny macierzy y_1 przy zerowej admitancji przewodu neutralnego.

W przypadku odbiorników symetrycznych wszystkie rozpatrywane przez nas macierze impedancji $z, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ i admitancji $y, y_1, y_1', y_2, y_3, y_3', y_4, y_5, y_5'$ stają się macierzami przekątnymi, gdyż różne od zera są jedynie składowe zerowe impedancji z_0, z_{m0}, z_{n0} i admitancji y_0, y_{c0}, y_{n0} a pozostałe składowe dodatnie i ujemne są zerami.

Wobec tego rozpatrywane macierze ulegają odpowiednim uproszczeniom, na przykład macierze z_5 i y_5 przybierają postać

$$Z_5 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} - 6z_{n0} + 3Z_n, & 0, & 0 \\ 0, & z_0 - z_{m0}, & 0 \\ 0, & 0, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0} - y_{n0}, & 0, & 0 \\ 0, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0}, & 0 \\ 0, & 0, & y_0 - 3y_{c0} - y_{n0} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

i są zazwyczaj w skróceniu pisane

$$Z_5 = \begin{bmatrix} Z_0, 0, 0 \\ 0, Z_1, 0 \\ 0, 0, Z_2 \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} Y_0, 0, 0 \\ 0, Y_1, 0 \\ 0, 0, Y_2 \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

gdzie $\hat{Z}_0, \hat{Z}_1, \hat{Z}_2$ jest to odpowiednio impedancja dla składowej symetrycznej zerowej, dodatniej i ujemnej,

$\hat{Y}_0, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ jest to odpowiednio admitancja dla składowej symetrycznej zerowej, dodatniej i ujemnej.

Wobec tego prawo Ohma lub drugie prawo Kirchhoffa, w ogólnym przypadku odbiornika asymetrycznego wyrażające się za pomocą wzorów:

$$U_s = z J_s, \quad (1.2)$$

$$U_s = z_2 J_s, \quad (1.14)$$

$$E_s = z_5 J_s, \quad (3.14)$$

zapiszemy dla odbiornika symetrycznego jako

$$U_s = Z J_s, \quad \text{czyli} \quad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0, 0, 0 \\ 0, z_0, 0 \\ 0, 0, z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0, 0, 0 \\ 0, Z_1, 0 \\ 0, 0, Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

$U_s = Z_2 J_s$, czyli

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & 0, & 0 \\ 0, & z_0 - z_{m0}, & 0 \\ 0, & 0, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0, & 0, & 0 \\ 0, & Z_1, & 0 \\ 0, & 0, & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

$E_s = Z_5 J_s$, czyli

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} - 6z_{n0} + 3Z_n, & 0, & 0 \\ 0, & z_0 - z_{m0}, & 0 \\ 0, & 0, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0, & 0, & 0 \\ 0, & Z_1, & 0 \\ 0, & 0, & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

Należy zatem stwierdzić, że za pomocą małych liter

$z_0, z_1, z_2, z_{m0}, z_{m1}, z_{m2}, z_{n0}, z_{n1}, z_{n2}, y_0, y_1, y_2, y_{c0}, y_{c1}, y_{c2}, y_{n0}, y_{n1}, y_{n2}$

oznaczone są jednoznacznie odpowiednie składowe symetryczne impedancji i admitancji, a znaki o wielkich literach używane dla odbiornika symetrycznego

$Z_0, Z_1, Z_2, Y_0, Y_1, Y_2$

są w pewnym stopniu wieloznaczne, gdyż na przykład impedancja dla składowej zerowej może oznaczać 6 różnych wielkości, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \text{dla macierzy } Z \quad & \hat{Z}_0 = \hat{z}_0, \\ & Z_1 \quad \hat{Z}_0 = \hat{z}_0 + 3\hat{Z}_n, \\ & Z_2 \quad \hat{Z}_0 = \hat{z}_0 + 2\hat{z}_{m0}, \\ & Z_3 \quad \hat{Z}_0 = \hat{z}_0 + 2\hat{z}_{m0} + 3\hat{Z}_n, \\ & Z_4 \quad \hat{Z}_0 = \hat{z}_0 + 2\hat{z}_{m0} - 3\hat{z}_{n0}, \\ & Z_5 \quad \hat{Z}_0 = \hat{z}_0 + 2\hat{z}_{m0} - 6\hat{z}_{n0} + 3\hat{Z}_n \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

6. OGRANICZENIA W STOSOWANIU ZASADY DWOISTOŚCI W ELEKTROTECHNICE

Niektóre zasady mechaniki lub matematyki znajdują odpowiednie zastosowanie w elektrotechnice, stając się ważnym narzędziem w badaniu obwodów elektrycznych. Jako przykład można by przytoczyć zasadę superpozycji, którą w mechanice podaje się nieraz w sposób następujący:

W założeniu, że istnieje proporcjonalność pomiędzy siłami a działaniami przez nie wywołanymi, działanie wywołane przez pewną siłę może być określone jako suma działań wywołanych przez składniki tej siły [5].

Współzależność wyrażona przez zasadę superpozycji wiąże ze sobą w mechanice na przykład siły i przesunięcia, w elektrotechnice współzależność ta wiąże ze sobą napięcie źródłowe w sieci i prąd przewodowy

w danej gałęzi lub napięcia źródłowe w sieci i napięcie odbiornikowe w danej gałęzi. U podstaw metod rozwiązywania obwodów elektrycznych, metody prądów cyklicznych i metody potencjałów węzłowych tkwi również zasada superpozycji.

Drugim przykładem adaptacji zasady stosowanej w jednej dyscyplinie wiedzy na teren innej dyscypliny jest zasada dwoistości, czyli dualizmu.

Autorzy-elektrycy nieraz wspominają o tym, że zasada dwoistości nie ogranicza się do obwodów elektrycznych, ale daje się rozciągnąć na wielkości wektorowe pól elektrycznych i magnetycznych [5] oraz że w geometrii niektórym twierdzeniom dotyczącym prostych i punktów odpowiada twierdzenia dualne dotyczące punktów i prostych [11].

Zasada dualizmu w geometrii była oczywiście historycznie wcześniejsza od tejże zasady w elektrotechnice; zasada ta należy do podstawowych postulatów geometrii rzutowej.

M. Stark w swej „Geometrii analitycznej“ [9] mówiąc o dualizmie płaskim rozpatruje jakikolwiek zbiór Z punktów i prostych na płaszczyźnie i za pomocą dowolnej korelacji przyksztalca zbiór Z w pewien inny zbiór Z' prostych i punktów w taki sposób, że proste przekształcają się w punkty, punkty w proste, proste przechodzące przez jeden punkt w punkty leżące na jednej prostej itd. Rozpatrując jakikolwiek twierdzenie geometrii rzutowej prawdziwe o zbiorze Z , należy wszędzie zamienić słowa „punkt“ i „prosta“ dokonując przy tym niezbędnych zmian stylistycznych, a mianowicie zdanie „punkt leży na prostej“ należy zamienić na zdanie „prosta przechodzi przez punkt“. W wyniku tej zamiany otrzymuje się, zgodnie z zasadą dualizmu płaskiego, twierdzenie prawdziwe o zbiorze Z' .

Na przykład dualne są twierdzenia:

1. Przez każde dwa punkty różne przechodzi dokładnie jedna prosta.
2. Każde dwie proste różne mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Należy tu zwrócić uwagę, że twierdzenia dualne nie dotyczą tego samego układu punktów i prostych, lecz dwóch różnych układów.

Autorzy-elektrycy [5], [6], [8], [11] mówiąc o zasadzie dualizmu w elektrotechnice zbierają pewne przesłanki dla wyciągnięcia konkluzji i zestawiają ze sobą na ogół następujące elementy pasywne i liniowe oraz odpowiadające im równania

1. element L o równaniach

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt} \\ i &= \int u dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

gdzie $\Gamma = \frac{1}{L}$ jest to odwrotność indukcyjności cewki, z elementem C o równaniach

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \\ u &= S \int i dt, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

gdzie $S = \frac{1}{C}$ jest to elastancja kondensatora;

2. trzy elementy R, L, S tworzące układ szeregowy o napięciu

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + S \int i dt \quad (6.3)$$

z trzema elementami G, C, Γ tworzącymi układ równoległy z prądem w gałęzi głównej

$$i = Gu + C \frac{du}{dt} + \Gamma \int u dt. \quad (6.4)$$

Zebrany materiał pozwala autorom podać treść zasady dualizmu w elektrotechnice; zasadę tę można by sformułować następująco:

W teorii obwodów elektrycznych 2 obwody są dualne, jeżeli ich równania mają pod względem matematycznym tę samą postać. Wchodzące do równań wielkości fizyczne występują na odpowiadających sobie miejscach tworząc następujące pary:

prąd	i	— napięcie	u
ładunek	q	— strumień skojarzony	Ψ
rezystancja	R	— konduktancja	G
impedancja	Z	— admitancja	Y
indukcyjność	L	— pojemność	C
odwrotność indukcyjności	Γ	— elastancja	S

stany fizyczne zaś i układy połączeń tworzą pary:

stan zwarcia	— stan jałowy
połączenie szeregowe	— połączenie równoległe
źródło napięcia	— źródło prądu
oczko sieci	— para węzłów sieci.

Autorzy [8] słusznie zwracają uwagę na okoliczność, że przez dualizm w elektrotechnice nie należy rozumieć równoważności obwodów pod względem elektrycznym; dualizm oznacza tylko podobieństwo w odpowiednich wyrażeniach algebraicznych.

Przed poddaniem analizie zagadnienia dualizmu w elektrotechnice chcieliśmy zaznaczyć, że analogicznie do geometrii rzutowej dualizm

i w tym przypadku dotyczy z reguły dwóch różnych układów połączeń, na przykład połączenia szeregowego 2 elementów, w którym impedancja wynosi $\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$, i połączenia równoległego tych elementów, w którym admitancja wynosi $\hat{Y} = \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2$. Gdy w pierwszym przypadku impedancja \hat{Z}_1 staje się zerem (stan zwarcia elementu) to napięcie na impedancji zastępczej \hat{Z} jest równe napięciu na impedancji \hat{Z}_2

$$\hat{U} = \hat{Z}_2 \hat{J}. \quad (6.5)$$

Gdy w drugim przypadku admitancja \hat{Y}_1 staje się zerem (stan jałowy elementu), to prąd płynący przez admitancję zastępczą \hat{Y} jest równy prądowi płynącemu przez admitancję \hat{Y}_2

$$\hat{J} = \hat{Y}_2 \hat{U}. \quad (6.6)$$

Wobec tego jeden wspólny element mający impedancję \hat{Z}_2 , admitancję \hat{Y}_2 z prądem \hat{J} , mający napięcie na końcówkach \hat{U} , może być z punktu widzenia stosowania dlań zasady dualizmu uważany za przypadek graniczny wyżej omówionych 2 różnych układów połączeń.

Podany przykład połączenia szeregowego i połączenia równoległego 2 elementów pasywnych można uważać za obrazujący dość trafnie zagadnienie dualizmu w elektrotechnice, dualizm obejmuje bowiem wszelkie zależności matematyczne dotyczące 2 wymienionych elementów zarówno w stanie ustalonym, jak i w stanie nieustalonym [8].

Możemy zatem uznać, że równania dualne mają dwójnik szeregowy R, L zasilany z idealnego źródła napięcia, rozpatrywany przy zamknięciu wyłącznika w gałęzi głównej w chwili początkowej i dwójnik równoległy G, C zasilany z idealnego źródła prądu, rozpatrywany przy otwarciu wyłącznika w gałęzi równoległej w chwili początkowej. Równaniami tymi są: równanie prądu płynącego przez element R, L

$$i = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) \quad (6.7)$$

i równanie napięcia na elemencie G, C

$$u = \frac{J}{G} (1 - e^{-\frac{G}{C} t}) \quad (6.8)$$

Wszelkie towarzyszące tym dwójnikom rozważania matematyczne prowadzą do zależności które nadal są dualne; gdyby na przykład dwójnik R, L połączyć równoległe, a dwójnik G, C szeregowo — wzory określające napięcia i prądy w stanie nieustalonym pozostają nadal dualne [8].

Przejdziemy z kolei do pewnego skomentowania zasady dualizmu w elektrotechnice. Przede wszystkim uważamy, że podawane przez auto-

rów pary wielkości i stanów fizycznych dualnych należałoby uzupełnić dla odbiornika wielofazowego przez parę

*sprzężenia indukcyjne — sprzężenia pojemnościowe
między gałęziami między węzłami*

W przeprowadzonych przez nas obliczeniach dla odbiornika trójfazowego, dualnymi równaniami i macierzami w układzie odniesienia składowych symetrycznych są zależności (1, 14), (1, 15), (4, 9), (4, 10):

$$U_s = z_2 J_s, \quad J_s = y_2 U_s$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, z_2 - z_{m2}, z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, z_0 - z_{m0}, z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, z_1 + 2z_{m1}, z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0}, y_{22} - y_{c2}, y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1}, y_{00} - y_{c0}, y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2}, y_{11} + 2y_{c1}, y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix}$$

Dualizm sprzężeń indukcyjnych z pojemnościowymi można by jeszcze w tym upatrywać, że przy ekranowaniu magnetycznym faz układ impedancji wzajemnych między gałęziami ($\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$), i w konsekwencji układ składowych symetrycznych tych impedancji, ($\hat{z}_{m0}, \hat{z}_{m1}, \hat{z}_{m2}$) staje się układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz z_2 przechodzi w z . Podobnie przy ekranowaniu elektrostatycznym faz układ admitancji wzajemnych między węzłami ($\hat{Y}_{bc}, \hat{Y}_{ac}, \hat{Y}_{ab}$), i w konsekwencji układ składowych symetrycznych tych admitancji ($\hat{y}_{c0}, \hat{y}_{c1}, \hat{y}_{c2}$), staje się układem operatorów wektorowych zerowych, a macierz y_2 przechodzi w y .

Drugiego przypadku granicznego, w którym operatory wektorowe \hat{Z}_{bc} i Y_{bc} dążyłyby do nieskończoności, nie dyskutujemy, gdyż przypadek ten uważamy za fizycznie nieprzystadny.

Skoro $\hat{Z}_{bc} = j\omega M_{bc}$ oraz $\hat{Y}_{bc} = -j\omega C_{bc}$, to w teorii obwodów elektrycznych przy skończonej pulsacji ω zagadnienie sprowadza się do tego, czy indukcyjność własna L bądź też indukcyjność wzajemna M oraz pojemność C mogą być nieskończenie wielkie.

Dla elementu liniowego, indukcyjności L lub M są równe stosunkowi pewnego strumienia magnetycznego skojarzonego do prądu wzbudzenia. Otóż prąd wzbudzenia jest niezerowy, a strumień magnetyczny ze względów fizycznych jest skończony, dlatego i indukcyjność nie może być nieskończenie wielka.

Dla elementu liniowego pojemność międzyfazową C przedstawiamy w elektrotechnice teoretycznej w postaci pewnego kondensatora [10], niech to będzie na przykład kondensator płaski. Choć wielu autorów wspomina o pojemności kondensatora płaskiego dążącej do nieskończoności przy zbliżaniu okładzin do siebie aż do ich zetknięcia, uważamy, że pojemność kondensatora płaskiego może być wielka, a nawet bardzo wielka, ale pozostaje zawsze skończona. Wynika to z faktu, że pojęcie pojemności kondensatora płaskiego, cylindrycznego lub kulistego jest pojęciem makroskopowym i przy zbliżaniu okładzin do siebie, przy pewnym skończonym odstępie tych okładzin, na przykład rzędu angstromów, kończy się zakres stosowności wzorów na pojemność kondensatora. Dochodzi do tego zjawisko przebicia każdego kondensatora przy zbliżaniu okładzin do siebie; skoro tylko na okładzinach jest

pewne napięcie, przebicie następuje przy odstępie skończonym. Od chwili przebicia nie można by już, ze względów fizycznych, wspominać o dalszym zbliżaniu okładzin i dalszym wzroście pojemności.

Druga sprawa związana z zagadnieniem dualizmu w elektrotechnice dotyczy pewnych ograniczeń w stosowaniu tej zasady dla obwodów bardziej skomplikowanych.

Póki zestawiamy ze sobą obwód 1-oczkowy o impedancjach Z_1 i Z_2 połączonych szeregowo z obwodem 2-węzłowym o admitancjach \hat{Y}_1 i \hat{Y}_2 połączonych równolegle, dualizm dotyczy rzeczywiście wszelkich rozważań, dyskusji i wzorów matematycznych związanych z wymienionymi dwoma układami połączeń.

Autorzy ekstrapolują jednak zasadę dualizmu na obwody bardziej skomplikowane. Kron [6] wysuwa na przykład tezę, że jakiekolwiek rozumowania i równania ustalone dla sieci oczkowych mogą być powtórzone w postaci dualnej dla sieci węzłowych; spotykamy się też w literaturze z poglądem, że metoda prądów cyklicznych jest dualna w stosunku do metody potencjałów węzłowych. Nie negując zasadniczej słuszności tych wypowiedzi, wskażemy jednak odnoszące się do sieci bardziej skomplikowanych, rozważania, rozumowania i wzory, które wyraźnie odchylają się od dualizmu sprawiając przez to, że o dualizmie obwodów o wielu gałęziach i o wielu węzłach można mówić w elektrotechnice jedynie w ograniczonym zakresie.

Zestawiając ze sobą obwody wielooczkowe z wielowęzłowymi należy odpowiednio dobrać liczbę oczek i liczbę węzłów, a mianowicie obwodowi n -oczkowemu odpowiada obwód o n węzłach niezależnych, mający ponadto jeden węzeł odniesienia, czyli łącznie obwód $(n+1)$ -węzłowy. Zbadamy pewne własności tych obwodów w przypadku szczególnym $n=3$, a następnie przejdziemy do przypadku ogólnego dla dowolnego n . Rozumowania nasze ograniczymy do obwodów liniowych o gałęziach ekranowanych.

Niech będzie dany obwód trójoczkowy typu mostka Wheatstone'a, zasilany przez pewną liczbę źródeł napięcia. Równanie macierzowe tego obwodu możemy napisać w postaci impedancyjnej i w postaci admitancyjnej.

Postać impedancyjna tego równania może być zapisana w skróceniu

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_z \mathbf{J} \quad (6.9)$$

lub też rozwinięta

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

W równaniu tym występuje macierz impedancji

$$\mathbf{Z}_z = \begin{bmatrix} Z_{11}, Z_{12}, Z_{13} \\ Z_{21}, Z_{22}, Z_{23} \\ Z_{31}, Z_{32}, Z_{33} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

będąca macierzą symetryczną i nieosobliwą [3]. Elementami jej są: na głównej przekątnej elementy typu \hat{Z}_{ll} , zwane impedancją własną l -tego oczka, a poza główną przekątną — elementy typu $Z_{kl} = \hat{Z}_{lk}$, zwane impedancją wzajemną k -tego oczka z l -tym.

Skoro macierz impedancji \mathbf{Z}_z jest nieosobliwa, istnieje jej macierz odwrotna

$$\mathbf{Z}_z^{-1} = \mathbf{Y}_z. \quad (6.12)$$

Mnożąc lewostronnie obie strony równania obwodu przez tę macierz odwrotną, dochodzimy do postaci admitancyjnej równania macierzowego naszego obwodu.

Postać admitancyjna tego równania może być zapisana w skróceniu

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}_z \mathbf{U} \quad (6.13)$$

lub rozwinięta

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}, Y_{12}, Y_{13} \\ Y_{21}, Y_{22}, Y_{23} \\ Y_{31}, Y_{32}, Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

W równaniu tym występuje macierz admitancji

$$\mathbf{Y}_z = \begin{bmatrix} Y_{11}, Y_{12}, Y_{13} \\ Y_{21}, Y_{22}, Y_{23} \\ Y_{31}, Y_{32}, Y_{33} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

będąca też macierzą symetryczną i nieosobliwą. Elementami jej są: na głównej przekątnej elementy typu \hat{Y}_{ll} , zwane admitancją własną zwarciową l -tego oczka, a poza główną przekątną elementy typu $\hat{Y}_{kl} = \hat{Y}_{lk}$, zwane admitancją wzajemną zwarciową k -tego oczka z l -tym.

Wymienionych równań obwodu trójczkowego oraz macierzy impedancji \mathbf{Z}_z i admitancji \mathbf{Y}_z nie nazwiemy dualnymi względem siebie, gdyż dotyczą one tego samego układu połączeń. Pod względem elektrycznym postać impedancyjna równania macierzowego wyraża to samo co postać admitancyjna, wobec tego równania te są sobie równoważne a nie dualne. Autorzy wyraźnie przestrzegają przed mieszaniem pojęć dualizmu i równoważności [8].

Podporządkujmy teraz naszemu obwodowi trójczkowemu obwód czterowęzłowy, zasilany przez pewną liczbę źródeł prądu. Obierając do-

wolny węzeł za węzeł odniesienia i oznaczając przez \hat{U}_a, \hat{U}_b oraz \hat{U}_c napięcia pozostałych węzłów względem węzła odniesienia, możemy równanie macierzowe tego obwodu zapisać w postaci admitancyjnej i w postaci impedancyjnej.

Postać admitancyjna tego równania może być zapisana w skróceniu

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y}_y \mathbf{U} \quad (6.16)$$

lub też rozwinięta

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa}, Y_{ab}, Y_{ac} \\ Y_{ba}, Y_{bb}, Y_{bc} \\ Y_{ca}, Y_{cb}, Y_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

W równaniu tym występuje macierz admitancji

$$\mathbf{Y}_y = \begin{bmatrix} Y_{aa}, Y_{ab}, Y_{ac} \\ Y_{ba}, Y_{bb}, Y_{bc} \\ Y_{ca}, Y_{cb}, Y_{cc} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

będąca macierzą symetryczną i nieosobliwą. Elementami jej są: na głównej przekątnej elementy typu \hat{Y}_{ll} , zwane admitancją własną l -tego węzła, a poza główną przekątną elementy typu $\hat{Y}_{kl} = \hat{Y}_{lk}$ zwane admitancją wzajemną k -tego węzła z l -tym.

Skoro macierz admitancji \mathbf{Y}_y jest nieosobliwa, istnieje jej macierz odwrotna

$$\mathbf{Y}_y^{-1} = \mathbf{Z}_y \quad (6.19)$$

Mnożąc lewostronnie obie strony równania obwodu przez tę macierz odwrotną, dochodzimy do postaci impedancyjnej równania macierzowego naszego obwodu.

Postać impedancyjna tego równania może być zapisana w skróceniu

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_y \mathbf{J} \quad (6.20)$$

lub też rozwinięta

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}, Z_{ab}, Z_{ac} \\ Z_{ba}, Z_{bb}, Z_{bc} \\ Z_{ca}, Z_{cb}, Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

W równaniu tym występuje macierz impedancji

$$\mathbf{Z}_y = \begin{bmatrix} Z_{aa}, Z_{ab}, Z_{ac} \\ Z_{ba}, Z_{bb}, Z_{bc} \\ Z_{ca}, Z_{cb}, Z_{cc} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

będąca też macierzą symetryczną i nieosobliwą. Elementami jej są: na

głównej przekątnej elementy typu Z_{ll} , zwane impedancją własną jałową l -tego węzła, a poza główną przekątną — elementy typu $\hat{Z}_{kl} = \hat{Z}_{lk}$, zwane impedancją wzajemną jałową k -tego węzła z l -tym.

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, wymienionych równań obwodu czterowęzłowego oraz macierzy admitancji \mathbf{Y}_y i impedancji \mathbf{Z}_y nie nazwiemy dualnymi względem siebie, gdyż dotyczą one tego samego układu połączeń, lecz powiemy, że są one sobie równoważne.

Zestawiając ze sobą oba obwody trójczokowy i czterowęzłowy, ich równania w obu postaciach impedancyjnej i admitancyjnej oraz odpowiednie macierze impedancji i admitancji, widzimy, że zasadniczo obwody i ich równania są dualne. W następujących rozumowaniach obwody odbiegają jednak od dualizmu i wykazują cechy nie tylko niepodobne co do postaci, lecz wręcz rozbieżne:

1. Macierz \mathbf{Z}_z dla dowolnego obwodu trójczokowego jest symetryczna bez względu na schemat połączeń i bez względu na wybór trzech oczek w tym schemacie, byleby, oczywiście, oczek liniowo niezależnych.

Macierz \mathbf{Y}_y dla obwodu czterowęzłowego jest symetryczna tylko wtedy, gdy napięcia trzech węzłów niezależnych są liczone względem wspólnego węzła odniesienia D . Gdyby wybrać 3 napięcia liniowo niezależne, ale liczone inaczej niż względem wspólnego węzła odniesienia, na przykład \hat{U}_{AB} , \hat{U}_{BC} , \hat{U}_{CD} , to macierz \mathbf{Y}_y nie byłaby już symetryczna, a jej elementy na głównej przekątnej i poza główną przekątną nie miałyby tak przejrzystej interpretacji elektrycznej, jak w przypadku symetrii. Nie można by więc już mówić o podobieństwie postaci i o dualizmie między macierzą symetryczną \mathbf{Z}_z a macierzą niesymetryczną \mathbf{Y}_y .

2. Oznaczmy impedancję wspólnej gałęzi k -tego oczka z l -tym przez \hat{Z}_4 . W obwodzie trójczokowym zachodzi równość modułów impedancji $Z_{kl} = Z_4$ a co do znaków mamy związek $\hat{Z}_{kl} = \hat{Z}_4$, gdy zwroty prądu cyklicznego k -tego i l -tego w gałęzi Z_4 są zgodne, a przy niezgodnych zwrotach mamy $\hat{Z}_{kl} = -\hat{Z}_4$. Wobec tego przez obiór zwrotu prądów cyklicznych w poszczególnych oczkach możemy wpływać na znak w równaniu $Z_{kl} = \pm \hat{Z}_4$.

Oznaczmy admitancję wspólnej gałęzi k -tego węzła z l -tym przez \hat{Y}_4 . Przy macierzy admitancyjnej \mathbf{Y}_y symetrycznej mamy zawsze w obwodzie czterowęzłowym $Y_{kl} = -\hat{Y}_4$; znak minus występuje niezależnie od naszego wyboru jakiegokolwiek zwrotu. Gdyby za szukane napięcia przyjąć nie napięcia węzłów niezależnych względem węzła odniesienia, ale przeciwnie napięcia węzła odniesienia względem węzłów niezależnych, to znak minus znikłby wprowadzie z równania na \hat{Y}_{kl} , ale zjawiłby się w równaniu

określającym admitancję własną Y_{ll} , jako sumę geometryczną admitancji gałęzi zbiegających się w l -tym węźle.

Odrębne rozumowania dotyczą zatem budowy macierzy Z_z i Y_v oraz związku ich elementów z impedancjami i admitancjami poszczególnych gałęzi obwodów.

3. Mówiąc o obwodzie trójoczkowym zakładaliśmy, że obieg oczek przez prądy cykliczne jest jednokrotny. Nie ma jednak przeszkód, by dozwolnić na wielokrotny obieg oczek omawiany przez niektórych autorów [1], [3]. Macierz impedancji obwodu wieloczkowego zależy od krotności obiegu oczek przez prądy cykliczne i w naszym przypadku dla $n=3$ oraz dla

p -krotnego obiegu pierwszego oczka przez prąd cykliczny,

q -krotnego obiegu drugiego oczka i

r -krotnego obiegu trzeciego oczka

macierz impedancji jednokrotnego obiegu

$$Z_z = \begin{bmatrix} Z_{11}, Z_{12}, Z_{13} \\ Z_{21}, Z_{22}, Z_{23} \\ Z_{31}, Z_{32}, Z_{33} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

ulega zmianie na

$$Z'_z = \begin{bmatrix} p^2 Z_{11}, pq Z_{12}, pr Z_{13} \\ qp Z_{21}, q^2 Z_{22}, qr Z_{23} \\ rp Z_{31}, rq Z_{32}, r^2 Z_{33} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Skoro liczby p , q oraz r są to dowolne liczby naturalne, z których każda może wzrastać nieograniczenie, to liczba różnych macierzy Z'_z przy wielokrotnym obiegu oczek jest również nieograniczona.

Rozumowania o podobnym charakterze elektrycznym i analogicznej postaci matematycznej nie są spotykane w dziedzinie obwodów wielowęzłowych, w których nie korzystamy z pojęcia krotności napięcia węzła niezależnego względem węzła odniesienia.

Rozpatrzmy teraz w przypadku ogólnym obwód n -oczkowy oraz obwód $(n+1)$ -węzłowy. Zaczniemy od obwodu wielowęzłowego i ponumerujemy w nim kolejno wszystkie $(n+1)$ węzłów. Wzorując się na macierzy symetrycznej stopnia trzeciego dla obwodu czterowęzłowego moglibyśmy utworzyć macierz admitancyjną symetryczną stopnia n po wyborze węzła odniesienia. Postąpimy przeciwnie i najpierw utworzymy macierz admitancyjną symetryczną stopnia $(n+1)$, a potem oberzemy węzeł odniesienia.

Macierz admitancyjna symetryczna stopnia $(n+1)$ ma postać następującą:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1n} & Y_{1,n+1} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2n} & Y_{2,n+1} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & \dots & Y_{3n} & Y_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} & \dots & Y_{nn} & Y_{n,n+1} \\ Y_{n+1,1} & Y_{n+1,2} & Y_{n+1,3} & \dots & Y_{n+1,n} & Y_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Za węzeł odniesienia możemy przyjąć dowolny z liczby $(n+1)$ węzłów. Niech to będzie na przykład węzeł drugi, wówczas przez skreślenie z macierzy \mathbf{Y}_{n+1} , drugiego wiersza i drugiej kolumny otrzymamy macierz admitancyjną stopnia n

$$\mathbf{Y}_{n2} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{13} & \dots & Y_{1n} & Y_{1,n+1} \\ Y_{31} & Y_{33} & \dots & Y_{3n} & Y_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n3} & \dots & Y_{nn} & Y_{n,n+1} \\ Y_{n+1,1} & Y_{n+1,3} & \dots & Y_{n+1,n} & Y_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Macierz \mathbf{Y}_{n2} jest uogólnieniem macierzy \mathbf{Y}_y określonej za pomocą równania (6.18) z tą formalną uwagą, że w macierzy \mathbf{Y}_y wskaźniki przy admitancjach były oznaczane za pomocą liter, dla odróżnienia od wskaźników admitancji w macierzy \mathbf{Y}_z oznaczanych za pomocą cyfr, a obecnie wskaźniki przy admitancjach są oznaczane za pomocą liczb. Zmiana sposobu oznaczania wskaźników nie ma charakteru merytorycznego.

Macierzy \mathbf{Y}_{n+1} można podporządkować $(n+1)$ różnych macierzy \mathbf{Y}_{nl} dla $1 \leq l \leq n+1$, przy czym rozpatrywana macierz \mathbf{Y}_{n2} jest przypadkiem szczególnym \mathbf{Y}_{nl} dla $l=2$.

Wobec tego dla danego sposobu ponumerowania węzłów można ułożyć $(n+1)$ różnych macierzy stopnia n typu (6.18) oraz $(n+1)$ różnych równań typu (6.16), czyli obwód można rozwiązać metodą potencjałów węzłowych $(n+1)$ różnymi sposobami.

Stosownie do zasad kombinatoryki wariacją z n przedmiotów po m nazywamy zbiór składający się z m przedmiotów wybranych spośród n danych przedmiotów i rozmieszczonych w określonej kolejności. Liczbę wszystkich możliwych wariacji z n przedmiotów po m oznaczamy przez P_n^m ; wynosi ona

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (6.27)$$

Wariację z n przedmiotów po n nazywamy permutacją z n przedmiotów. Liczbę wszystkich możliwych permutacji z n przedmiotów oznaczamy przez P_n ; wynosi ona

$$P_n = n! \quad (6.28)$$

W zastosowaniu do naszego obwodu $(n+1)$ -węzłowego liczba wszystkich możliwych macierzy \mathbf{Y}_{n+1} , przy dopuszczeniu dowolnej numeracji węzłów, wynosi tyle, ile liczba permutacji z $(n+1)$ przedmiotów, czyli

$$P_{n+1} = (n+1)! \quad (6.29)$$

Liczba wszystkich możliwych macierzy \mathbf{Y}_{nl} przy dopuszczeniu dowolnej numeracji węzłów wynosi tyle, ile liczba wariacji z $(n+1)$ przedmiotów po n , czyli

$$P_{n+1}^n = \frac{(n+1)!}{(n+1-n)!} = (n+1)! \quad (6.30)$$

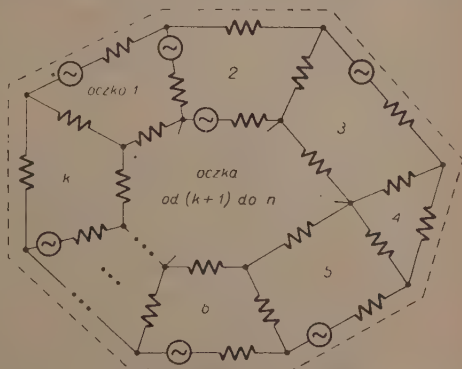
A więc liczba wszystkich możliwych macierzy \mathbf{Y}_{n+1} , jest równa liczbie wszystkich możliwych macierzy \mathbf{Y}_{nl} i równa się $(n+1)$ silnia. Dla obwodu czterowęzłowego na przykład liczba macierzy \mathbf{Y}_4 lub liczba macierzy \mathbf{Y}_3 , wynosi $4! = 24$.

Obliczenia te można opatrzyć następującym komentarzem. Każdej macierzy \mathbf{Y}_{n+1} można wprowadzić podporządkować $(n+1)$ różnych macierzy \mathbf{Y}_{nl} , a liczba różnych macierzy \mathbf{Y}_{n+1} , wynosi z kolei $(n+1)!$, ale liczb $(n+1)$ i $(n+1)!$ nie można by mnożyć przez siebie dla obliczenia ile jest różnych macierzy \mathbf{Y}_{nl} , gdyż przy permutacjach admitancji w macierzy \mathbf{Y}_{n+1} , i skreślaniu w tych macierzach l -tego wiersza i l -tej kolumny otrzymujemy czasem przy różnych macierzach \mathbf{Y}_{n+1} , identyczną macierz \mathbf{Y}_{nl} stopnia o jeden niższego.

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia obwodu n -oczkowego. Dla łatwiejszej porównywalności z obwodem $(n+1)$ -węzłowym zakładamy, że obwód n -oczkowy nie ma gałęzi skrzyżowanych o skrzyżowaniu nieusuwalnym, czyli że jest płaski (planarny) [8], następnie, że jest podzielony na oczka rozłączne, czyli na takie, których obszary nie mają części wspólnej.

Niech to będzie obwód wskazany na rys. 7 i niech zawiera k oczek stykających się z zewnętrznym konturem obwodu oraz

$(n-k)$ oczek nie stykających się z tym konturem. Ponumerujemy w pewien sposób oczka naszego obwodu nadając im numery od 1 do n .



Rys. 7. Obwód n -oczkowy płaski bez gałęzi skrzyżowanych.

Niech wszystkie oczka będą obiegane jednokrotnie przez prądy cykliczne, a ponadto niech zwrot obiegu będzie ten sam dla wszystkich oczek, a więc bądź zgodny z obiegiem wskazówek zegara, bądź też przeciwny temu obiegowi. Dzięki takiemu założeniu, impedancja wspólnej gałęzi dwóch oczek i impedancja wzajemna tych oczek będą się różniły tylko znakiem przy równych modułach, co odpowiada przeciwnym znakom admitancji wzajemnej dwóch węzłów i admitancji wspólnej gałęzi tych węzłów.

Macierzy admitancyjnej \mathbf{Y}_{n+1} , stopnia $(n+1)$ chcemy podporządkować macierz impedancyjną \mathbf{Z}_{n+1} , tegoż stopnia. W tym celu do n oczek obwodu powyżej określonych dołączamy oczko o numerze $(n+1)$, wskazuje na rys. 7 za pomocą linii kreskowanej biegnącej wzdłuż zewnętrznego konturu obwodu. Niech prąd cykliczny obiega to oczko przeciwnie do zwrotu prądu w pozostałych n oczkach; dzięki temu założeniu w każdej z k gałęzi zewnętrznego konturu zwroty prądów cyklicznych są również przeciwne.

Omawiana macierz impedancyjna stopnia $(n+1)$ jest symetryczna i ma następującą postać:

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} & Z_{1,n+1} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} & Z_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} & Z_{n,n+1} \\ Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} & \dots & Z_{n+1,n} & Z_{n+1,n+1} \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Macierz \mathbf{Z}_{n+1} , charakteryzuje obwód wieloooczkowy, w którym każda gałąź jest obiegana przez 2 prądy cykliczne o przeciwnych zwrotach. Jeżeli w tej macierzy skreślimy wiersz $(n+1)$ i kolumnę $(n+1)$, to otrzymamy macierz $\mathbf{Z}_{n,n+1}$ stopnia n , mającą k oczek zewnętrznych. Macierzy tej odpowiada zwykły sposób rozwiązywania obwodu metodą prądów cyklicznych.

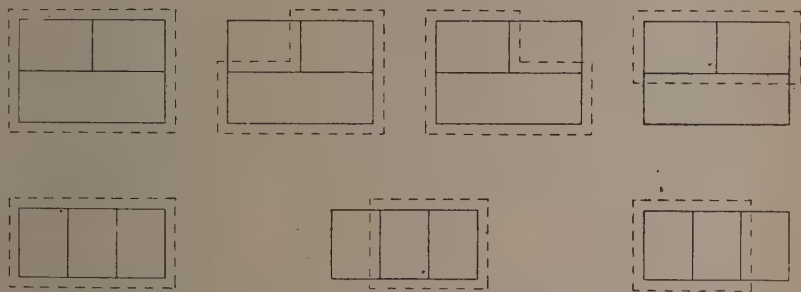
Możemy jednak skreślić w macierzy \mathbf{Z}_{n+1} , dowolny inny wiersz l -ty i kolumnę l -tą, otrzymamy wówczas macierz \mathbf{Z}_{nl} stopnia n

$$\mathbf{Z}_{nl} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1,l-1} & Z_{1,l+1} & \dots & Z_{1n} & Z_{1,n+1} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2,l-1} & Z_{2,l+1} & \dots & Z_{2n} & Z_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{l-1,1} & Z_{l-1,2} & \dots & Z_{l-1,l-1} & Z_{l-1,l+1} & \dots & Z_{l-1,n} & Z_{l-1,n+1} \\ Z_{l+1,1} & Z_{l+1,2} & \dots & Z_{l+1,l-1} & Z_{l+1,l+1} & \dots & Z_{l+1,n} & Z_{l+1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{n,l-1} & Z_{n,l+1} & \dots & Z_{nn} & Z_{n,n+1} \\ Z_{n+1,1} & Z_{n+1,2} & \dots & Z_{n+1,l-1} & Z_{n+1,l+1} & \dots & Z_{n+1,n} & Z_{n+1,n+1} \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

której jako kontur zewnętrzny odpowiada obwód l -tego oczka, mający na ogół inną liczbę oczek zewnętrznych niż k . Wobec tego kontur zewnętrzny obwodu wielooczkowego wskazany na rys. 7 jest tylko przypadkiem szczególnym, jednym spośród $(n+1)$ możliwych konturów zewnętrznych.

Macierz Z_{nl} jest uogólnieniem macierzy Z_z określonej dla $n=3$ za pomocą równania (6.11).

Przy obranej kolejności $(n+1)$ oczek wskazanych na rys. 7, macierz Z_{n+1} , jest jedyna, a liczba różnych macierzy Z_{n_l} wynosi $(n+1)$. Kontur $(n+1)$ oczka możemy jednak obrać nie tylko równy konturowi zewnętrznemu obwodu n -oczkowego, ale możemy też z tego konturu wyłączyć pewną liczbę oczek. Wobec tego przy tej samej kolejności oczek każdej konfiguracji $(n+1)$ oczka odpowiada inna macierz Z_{n+1} . Należy zatem stwierdzić, że podczas gdy przy obranej kolejności węzłów macierz symetryczna Y_{n+1} była jedyna, to przy obranej kolejności oczek macierzy symetrycznych Z_{n+1} może być wiele, zależnie od wyboru konturu $(n+1)$ oczka.



Rys. 8. Przykłady obwodów trójoczkowych o różnym mnożniku λ .

Jeżeli pozwolić w danym obwodzie $(n+1)$ -węzłowym na permutację numeracji węzłów, to — jak już wiemy — liczba różnych możliwych macierzy Y_{n+1} wynosi $(n+1)!$. W obwodzie n -oczkowym natomiast, uzupełnionym przez jeszcze jedno oczko w sposób wskazany na rys. 7, jeżeli dozwolimy na permutację numeracji oczek, to dla danego wyboru oczka dodatkowego liczba różnych macierzy Z_{n+1} wynosi też $(n+1)!$. Oznaczając przez λ liczbę naturalną, wskazującą ilu sposobami do danych n oczek zostało dobrane dodatkowe oczko $(n+1)$, powiemy, że łączna liczba różnych macierzy Z_{n+1} wynosi $\lambda \cdot (n+1)!$, czyli jest całkowitą wielokrotnością liczby $(n+1)!$.

Mnożnik λ dla danej liczby oczek nie jest jednoznacznie wyznaczalny, gdyż zależy od konfiguracji obwodu. Na przykład już dla obwodu trójoczkowego $n=3$ mnożnik λ może wynosić 4 dla obwodu typu mostka Wheatstone'a, albo 3 dla obwodu składającego się z oczek położonych kolejno za sobą, wskazanych na rys. 8.

Niewyznaczalność mnożnika λ i liczby macierzy dla $n=3$ należy tak rozumieć, że różnych macierzy $Z_{n+1}=Z_4$ może być bądź $3 \cdot 4!=72$, bądź też $4 \cdot 4!=96$, zależnie od konfiguracji obwodu.

Skoro mnożnik λ przybiera 2 wartości już dla $n=3$, to tym bardziej przybiera on więcej niż jedną wartość dla większej liczby oczek, $n>3$.

Przechodząc do sprawy wzajemnego stosunku liczby macierzy Z_n stopnia n i liczby macierzy Z_{n+1} stopnia $(n+1)$, należy stwierdzić, że i ten stosunek nie jest jednoznacznie wyznaczalny, lecz zależy od konfiguracji obwodu i od tego, ile oczek rozłącznych jest zawartych w konturze obranego $(n+1)$ oczka.

Uzupełniając rozumowania związane z dualizmem, przeprowadzone dla obwodu trójoczkowego i obwodu czterowęzłowego, można by w przypadku ogólnym dowolnego n dodać, co następuje.

Gdy w geometrii mówimy o jedynej prostej przechodzącej przez dwa punkty i o jedynym punkcie przecięcia się dwóch prostych, to odpowiednie konstrukcje można uważać za dualne, gdyż odpowiadające sobie pojęcia można ułożyć w pary według ustalonego wzoru, a liczba możliwych konstrukcji jest w obu zestawianych przypadkach ta sama i wynosi dokładnie jeden.

Gdy w najprostszym przypadku w elektrotechnice rozpatrujemy obwód jednooczkowy o 2 impedancjach szeregowych i obwód dwuwęzłowy o 2 admitancjach równoległych, to obwody te można uważać za dualne, gdyż w równaniach określających te obwody odpowiadające sobie wielkości i stany fizyczne można ułożyć w pary według ustalonego wzoru, a liczba możliwych sposobów analizowania obwodu jest w obu przypadkach ta sama; wszelkim rozumowaniom odnoszącym się do jednego obwodu odpowiadają rozumowania dualne dla drugiego.

W rozpatrywanych obwodach bardziej skomplikowanych, n -oczkowym badanym metodą prądów cyklicznych i $(n+1)$ -węzłowym badanym metodą potencjałów węzłowych, można mówić o dualizmie jedynie w ograniczonym zakresie. W szczególności przy macierzach impedancji i admitancji symetrycznych liczba możliwych sposobów rozwiązywania obwodu $(n+1)$ -węzłowego jest ściśle określona i wynosi $(n+1)!$. Liczba możliwych spo-

sobów rozwiązywania obwodu n -oczkowego zależy od konfiguracji obwodu, od wyboru oczka ($n+1$), od wyboru zwrotu prądów cyklicznych w poszczególnych oczkach i od krotności obiegu oczek przez prądy cykliczne.

Katedra Elektrotechniki Teoretycznej

Politechniki Warszawskiej

WYKAZ LITERATURY

1. Cholewicki T. — Zastosowania macierzy w elektrotechnice. (Skrypt PWN), Warszawa, 1952 r.
2. Cholewicki T. — Macierze składowych symetrycznych. Arch. Elektr., Warszawa, Nr 2/54.
3. Corbeiller P. — Matrix analysis of electric networks. Harvard University Press, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1950 r.
4. Hobson I. E. — Składowe symetryczne. (Tłumaczenie). Przesył i rozdział energii elektrycznej, tom III, PWT, Warszawa, 1951 r.
5. Konorski B. — Teoria dwójników i czwórników elektrycznych. PWT, Warszawa 1951 r.
6. Kron G. — Tensor analysis of networks. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1949 r.
7. Nowacki P. — Składowe symetryczne. (Skrypt). PWN, Wrocław, 1954 r.
8. Page W., Seely S. — General network analysis. Mc Graw Hill Book Co, Inc., New York, 1952 r.
9. Stark M. — Geometria analityczna. Monografie Matematyczne, Warszawa, 1951 r.
10. Stigant S. — Modern electrical engineering mathematics. Hutchinson's Publications, London, 1946 r.
11. (Praca zbiorowa) Electric circuits. By members of the Staff of the Department of Electrical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1949 r.

Т. ХОЛЕВИЦКИ

КОНТУРНЫЕ И УЗЛОВЫЕ МЕТОДЫ В МАТРИЦАХ СИММЕТРИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Резюме

Настоящую статью можно считать продолжением предыдущей под заглавием „Матрицы симметрических составляющих“, которая появилась в № 2/54 „Archiwum Elektrotechniki“. Настоящая статья относится к четырёхпроводным контурам соединённым звездой, рассматриваемых в стационарном состоянии, при выступании в них двусторонних и симметрических связей. В общем случае — нагрузка контура не симметрична. Связи мы должны вообразить себе в системе соединений как некоторые индуктивности между ветвями, или же ёмкости между узлами.

Контур мы исследуем в системе соотношения симметрических составляющих, а математическим инструментом является матричный метод.

В простейшем случае выступления индуктивных связей между фазами мы имеем дело с сопротивительной матрицей

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}$$

Эта матрица умноженная по правой стороне на столбцевую матрицу тока J_s даёт в произведении столбцевую матрицу напряжения U_s . Соответственное уравнение представляет сопротивительную форму закона Ома, выраженную в системе соотношения симметрических составляющих.

В общем случае выступают индуктивные связи как между фазами, так и с нейтральным проводом. Соответственная сопротивительная матрица

$$z_s = \begin{bmatrix} z_0 + 2(z_{m0} - 3z_{n0}) + 3Z_n & , & z_2 - z_{m2} - 3z_{n2} & , & z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} \\ z_1 - z_{m1} & , & -3z_{n1} & , & z_0 - z_{m0} \\ z_2 - z_{m2} & , & -3z_{n2} & , & z_1 + 2z_{m1} \\ & & & & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}$$

умноженная по правой стороне на столбцевую матрицу токов J_s даёт в произведении матрицу напряжений E_s . Соответственное уравнение мы можем назвать формой проводимости второго закона Кирхгофа, выраженного в системе соотношения симметрических составляющих.

Во второй части статьи принято, что соответственные узлы сети связаны с помощью ёмкостей. В простейшем случае матрица проводимости

$$y_s = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0} & , & y_{22} - y_{c2} & , & y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1} & , & y_{00} - y_{c0} & , & y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2} & , & y_{11} + 2y_{c1} & , & y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix}$$

является множителем в матричном уравнении $J_s = y_s U_s$ называемом формой проводимости закона Ома в системе соотношения симметричных составляющих.

В общем случае мы вводим матрицу проводимости

$$y_s = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_0^2}{Y_n + 3y_0} & , & y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0} & , & y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0} \\ y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0} & , & y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} & , & y_{22} + 2y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0} & , & y_{11} + 2y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0} & , & y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix}$$

которая является множителем в матричном уравнении $J_s = y_s E_s$ выражающем формулу проводимости второго закона Кирхгофа в системе соотношения симметричных составляющих.

В частном случае симметрической нагрузки выше рассматриваемые матрицы становятся диагональными. В случае, когда происходит магнитная экранировка ветвей или электростатическая экранировки узлов, соответственные симметрические составляющие взаимных сопротивлений или проводимости становятся равными нулю. В матрицах z_s и y_s выступают в таком случае только такие выражения как Z_n или Y_n , а также выражения, соответствующие собственным сопротивлениям контуров и собственным проводимостям узлов.

В третьей части автор рассматривает двойственную форму матриц z_s и y_s и предлагает к сопоставляемым и приводимым в литературе величинам, системам соединений и физическим состояниям, связанным принципом двойственности, прибавить следующую пару: индуктивные связи между ветвями — ёмкостные связи между узлами.

Переходя к линейным и плоским контурам, мы можем сравнивать контур состоящий из n контуров с контуром состоящим из $(n+1)$ узлов. Вместо матрицы n -й степени автор вводит матрицы степени выше, прибавляя в контурном методе к n независимым контурам, новый контур, являющийся суммой всех рассматриваемых контуров; в узловом же методе количество n независимых узлов автор увеличивает узлом соотношения.

В литературе мы часто встречаем мнение, что контурные уравнения — двойственные, и в особенности, что всякие рассуждения и уравнения установленные для контурного метода повторимы в двойственной форме в узловом методе.

Действительно, можно утверждать, что многочисленные свойства контурного и узлового метода являются двойственными по отношению к применяемому рассуждению. Небезопасно, однако, экстраполировать сходство формы и математического смысла формул на все рассуждения относящиеся к двойственным контурам. В особенности, если мы характеризуем контурную цепь при помощи матрицы Z_{n+1} , а узловую цепь при помощи матрицы Y_{n+1} $(n+1)$ -ой степени, то при $n > 2$ мы можем установить нижеследующие соотношения:

При перестановке последовательности $(n+1)$ узлов и изменении избранного узла соотношения — количество возможных способов, при помощи которых мы можем решить узловую сеть, равняется точно $P_{n+1}^m = (n+1)!$, где $m=n$. Количество это равно количеству разных матриц проводимости Y_{n+1} .

С другой сторону, количество разных сопротивительных матриц Z_{n+1} и количество разных возможных способов, которые позволяют решить цепь при перестановке очередности $(n+1)$ контуров и при изменении контура $(n+1)$ -ого очка зависит от геометрической конфигурации сети, т.е. от ее топологических свойств.

Как вычислено в статье, количество разных сопротивительных матриц Z_{n+1} равно $\lambda \cdot P_{n+1} = \lambda \cdot (n+1)!$, где коэффициент λ принимает значения целых чисел 3, 4, 5, 6, ...

Для $n=3$ коэффициент $\lambda=3$ или 4, а для большего количества контуров λ больше чем для 3 контуров. Также и отношение количества возможных способов решения контурной сети к количеству разных матриц Z_{n+1} зависит от конфигурации сети.

Принимая во внимание, согласно с Ле-Корбейе [3], что контурные токи могут обегать по контуру своего очка более одного раза, и что это обстоятельство влияет на изменение значения элементов матрицы Z_{n+1} , мы видим, что в узловых сетях не выступает взаимное условие, соответствующее указанному явлению в контурных сетях.

В заключении мы констатируем, что принцип двойственности для более сложных сетей ($n > 2$) подтверждается только в некоторых рассуждениях, причём всегда возможен переход к иным рассуждениям и расчётам, в которых не будет возможно усмотреть существование двойственности.

T. CHOLEWICKI

MESH AND NODE-PAIR METHODS IN MATRICES OF SYMMETRICAL COMPONENTS

Summary

This paper, which can be considered as a continuation of the article on matrices of symmetrical components published in the "Archiwum Elektrotechniki" (No 2/54) deals with the three-phase four-wire, star-connected static networks having bilateral

symmetrical couplings. The load conditions are unbalanced in the general case. Couplings may be imagined alternatively as inductances between branches or as capacitances between nodes. The investigation is performed in symmetrical components as reference frame and matrix algebra is used as mathematical method.

In the simplest case of inductive couplings between phases the impedance matrix

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}$$

postmultiplied by the current column matrix \mathbf{J}_s gives as product the load-voltage column matrix \mathbf{U}_s . The respective equation represents the impedance form of Ohm's law expressed in symmetrical components as reference frame.

In the general case phases are inductively coupled between themselves as well as with the neutral conductor. The impedance matrix

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 + 2(z_{m0} - 3z_{n0}) + 3Z_n, & z_2 - z_{m2} - 3z_{n2}, & z_1 - z_{m1} - 3z_{n1} \\ z_1 - z_{m1} - 3z_{n1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} - 3z_{n2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}$$

postmultiplied by the current matrix \mathbf{J}_s gives as product the source voltage matrix \mathbf{E}_s . The respective equation may be called the impedance form of Kirchhoff's second law expressed in symmetrical components.

In the second part of the paper it is assumed that respective nodes of the network are coupled by capacitances. The simplest admittance matrix

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0}, & y_{22} - y_{c2}, & y_{11} - y_{c1} \\ y_{11} - y_{c1}, & y_{00} - y_{c0}, & y_{22} + 2y_{c2} \\ y_{22} - y_{c2}, & y_{11} + 2y_{c1}, & y_{00} - y_{c0} \end{bmatrix}$$

is a multiplicand in the matrix equation $\mathbf{J}_s = \mathbf{y}_2 \mathbf{U}_s$ which may be called the admittance form of Ohm's law expressed in symmetrical components.

In the general case we introduce the admittance matrix

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{00} + 2y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_0^2}{Y_n + 3y_0}, & y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0} \\ y_{11} - y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_0 y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_{22} + 2y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ y_{22} - y_{c2} - y_{n2} - \frac{3y_0 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_{11} + 2y_{c1} - y_{n1} - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_{00} - y_{c0} - y_{n0} - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix}$$

which is a multiplicand in the matrix equation $\mathbf{J}_s = \mathbf{y}_5 \mathbf{E}_s$, expressing the admittance form of Kirchhoff's 2-nd law in symmetrical components as reference basis.

In a particular case of a symmetrical load the above discussed matrices become diagonal. In the case of magnetic screening of branches or electrostatic screening of nodes respective symmetrical components of mutual impedances or admittances become equal to zero. Matrices \mathbf{z}_5 and \mathbf{y}_5 then consist only of such terms as Z_n or Y_n and those corresponding to self-impedances of branches or self-admittances of nodes.

In the third part of the paper the author discusses the dual form of \mathbf{z}_2 and \mathbf{y}_2 and suggests that to the quantities, connections and physical states mentioned as connected by dual relationship further two quantities should be added:

inductive couplings between branches — capacitive couplings between nodes.

Passing on to linear and flat circuits we can compare an n -mesh circuit with an $(n+1)$ -node circuit. Instead of matrices of the n -th order the author introduces those of $(n+1)$ order adding to n independent meshes a new one whose contour is the sum of all the meshes considered in the mesh method and increasing in the node pair method the number of n independent nodes by the datum node.

It is often said that mesh and node equations are dual and particularly that whatever reasonings and equations have been established for mesh networks, all can be repeated in a dual form for node networks.

In fact, many properties of mesh and node methods of reasoning are really dual. Nevertheless it would be dangerous to extend the similarity of form and of meaning in mathematical representations to all reasonings and to all considerations concerning dual circuits. In particular, if we characterize the mesh circuit by the matrix \mathbf{Z}_{n+1} and the node circuit by \mathbf{Y}_{n+1} both of order $(n+1)$ the following can be stated for $n > 2$.

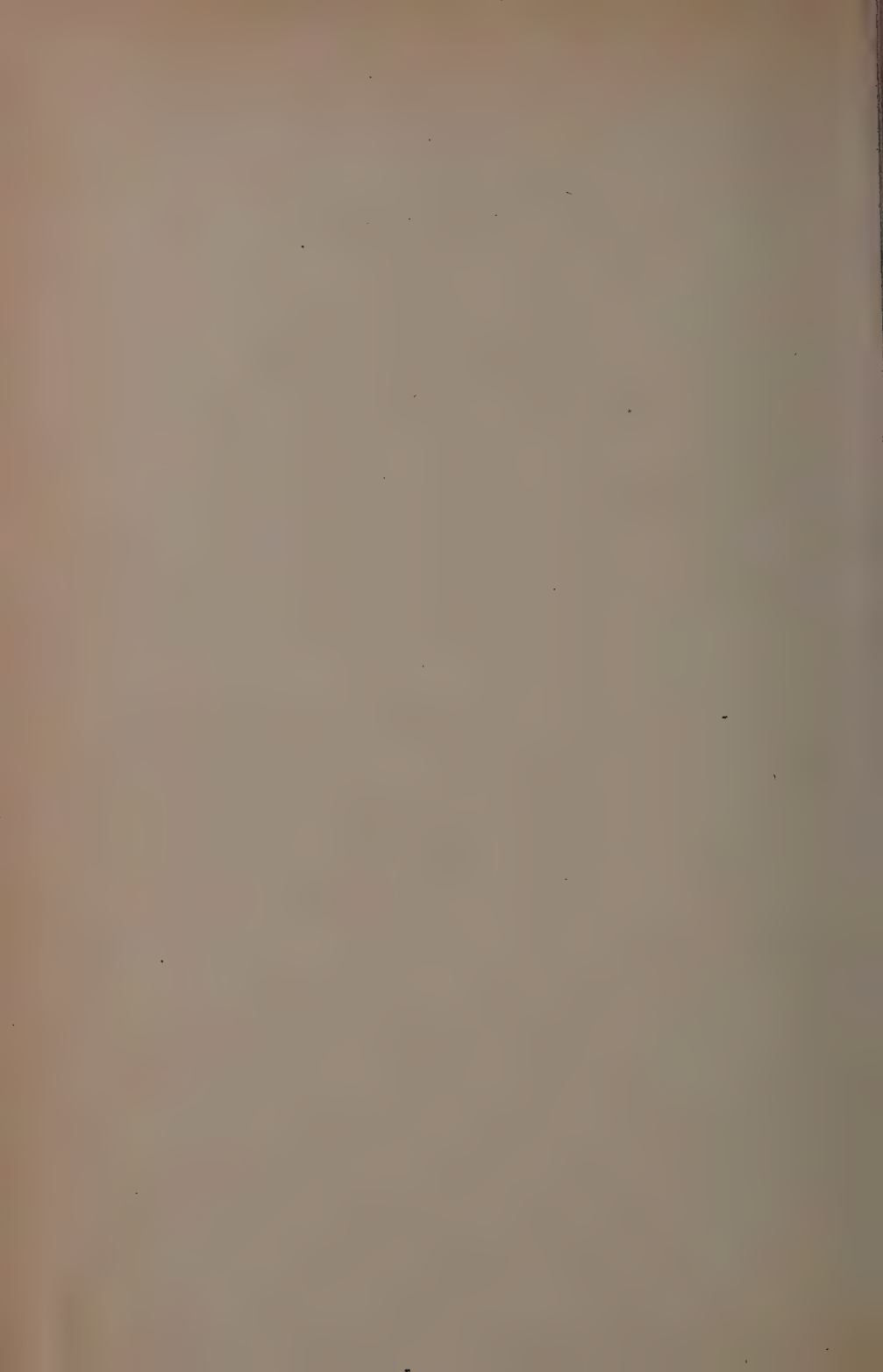
The number of possible solutions of a node network by permutations in the order of $(n+1)$ nodes and changing the selected datum node, is $P_{n+1}^m = (n+1)!$ where $m=n$. This number is equal to the number of different admittance matrices \mathbf{Y}_{n+1} .

On the other hand the number of different matrices \mathbf{Z}_{n+1} and the number of possible solutions of a mesh network when permutations in the order of $(n+1)$ meshes are performed and the contour of the $(n+1)$ -st mesh is altered, depends on the geometrical configuration of the network, i. e. on its topological properties.

As calculated in this paper, the number of different impedance matrices \mathbf{Z}_{n+1} is $\lambda \cdot P_{n+1} = \lambda \cdot (n+1)!$ where λ assumes integer values 3, 4, 5, 6, ... For $n=3$ λ is either 3 or 4; for a greater number of loops λ exceeds those values. The ratio of possible solutions of a mesh network to the number of different matrices \mathbf{Z}_{n+1} depends on the configuration of the network.

Taking into account — after Le Corbeiller [3] — that cyclic currents can flow more than once around the contour of their meshes which effects the values of the elements of the matrix \mathbf{Z}_{n+1} , we see that this circumstance has no reciprocal in the node calculus.

We can conclude that the principle of duality for more complicated circuits ($n > 2$) can be applied to some reasonings only and it is possible always to pass to other reasonings and calculations where no duality can be observed.



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
ZAKŁAD ELEKTRONIKI

Komunikaty z prac

referowanych na zebraniu sprawozdawczym IPPT w dniu 17. 2. 1955

538.213:669.15

OPÓŹNIENIE MAGNETYCZNE W STALACH KRZEMOWYCH

A. SMOLIŃSKI i M. ŻBIKOWSKI

Opisano pomiary jednego rodzaju opóźnienia magnetycznego — dezakomodacji — w rdzeniach wyciętych ze stali transformatorowej klasy A3. Uzyskane wyniki są porównywane z wynikami pomiarów otrzymywanymi na innych dotychczas badanych materiałach. Wyniki pomiarów otrzymanych dla niższych temperatur wymagają wytłumaczenia.

МАГНИТНОЕ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ В СЕРДЕЧНИКАХ
ИЗ КРЕМНИСТОЙ СТАЛИ

Резюме

Описаны измерения одного рода магнитного последствия (без акомодации) в сердечниках штампованных из трансформаторной стали класса А3. Результаты сравнены с измерениями полученными при исследовании других материалов. Для более низких температур полученные результаты требуют оговорок.

MAGNETIC AFTER-EFFECT IN SILICON STEELS

Summary

Description of measurements of one kind of magnetic after-effect — desaccommodation in cores cut out from class A3 transformer steel. The results obtained are compared with measurement results for other materials so far investigated. Measurement results at lower temperatures require some explanations.

1. Wstęp. Jeden z rodzajów opóźnienia magnetycznego, zwany dezakomodacją, odgrywa ważną rolę w technice pomiarowej miękkich materiałów magnetycznych w słabych polach. Dezakomodacja polega na tym, iż materiał magnetyczny namagnesowany silnymi polami wykazuje w słabych polach nienormalnie duże wartości przenikalności malejące z czasem. Okres ustalania się własności magnetycznych w pewnych warunkach trwa bardzo długo i sięga czasem kilku-

nastu dni. Maksymalne wartości przyrostu przenikalności mogą osiągać dla pewnych gatunków materiałów dwieście procent wartości ustalonej. Sytuację pogarsza fakt, że maksymalne wartości przyrostu przenikalności występują przy natężeniach pól rzędu 20 mOe, przyjętych w technice do określania właściwości miękkich materiałów magnetycznych.

Nie uwzględnienie omawianego zjawiska w praktyce fabrycznej wywołuje poważne zamieszania i szkody w produkcji

i dlatego w niektórych normach pomiarowych spotykamy się z próbami ujęcia tego zjawiska w postaci ustalenia czasu między rozmagnesowaniem a pomiarem jako przerwy 24 godzinnej.

Jak wykazały nasze wstępne pomiary, omawiana przerwa czasowa zależy jednak od naprężeń wprowadzonych do próbki przy jej wycinaniu. Próbkę pierścieniową z normalnej blachy krzemowej 4% (klasy A3), wyciętę wykrojnikiem blokowym w pierścieniu o grubości 10 mm, wykazują zjawisko dezakomodacji w czasie dość długim, sięgającym kilkudziesięciu godzin. Przerwa dobową uspokaja praktycznie próbkę; powstają po niej tylko jednoprocenowe przyrosty przenikalności. Natomiast próbka wyżarzona w sposób usuwający prawie wszystkie naprężenia uspokaja się w czasie dziesięciokrotnie krótszym.

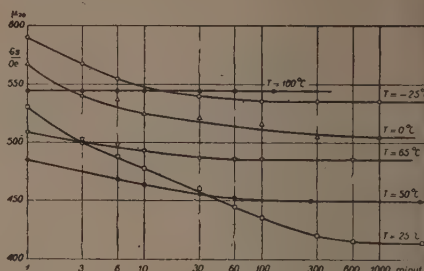
Te wstępne wyniki wskazują, że stosowanie przerwy dobowej przyjętej w normach przy precyzyjnych pomiarach rdzeni transformatorowych ze stali krzemowej prowadzi przy badaniach rdzeni żarzonych do zbyt dużych strat czasu.

Zadaniem omawianej pracy jest ustalenie warunków występowania maksymalnych wartości przyrostów przenikalności oraz praktycznego czasu trwania pobudzenia magnetycznego rdzenia dla różnych gatunków stali krzemowych stosowanych w technice krajowej w różnych warunkach pracy.

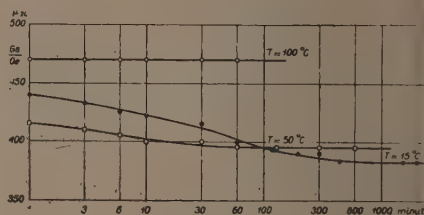
2. Wyniki pomiarów. Referowana część pracy obejmuje pomiary zjawiska dezakomodacji [7] w rdzeniach pierścieniowych wyciętych z blachy krzemowej klasy A3, wykazujące — wskutek wprowadzenia naprężeń i odkształceń przy wycinaniu wykrojnikiem blokowym — własności na granicy klasy A5 [4].

Typowe przebiegi zjawiska dezakomodacji zmierzonego w słabych polach $\bar{H} = 20$ i 5 mOe podano na rys. 1 i 2. Wykazują one następujące własności: przenikalność rdzenia poddanego rozmagnesowaniu opada powoli w czasie w sposób zależny od temperatury. Najdłuższy czas

ustalania oraz największe różnice przenikalności wykazują krzywe zdjęte w temperaturze około 25°C. W miarę wzro-



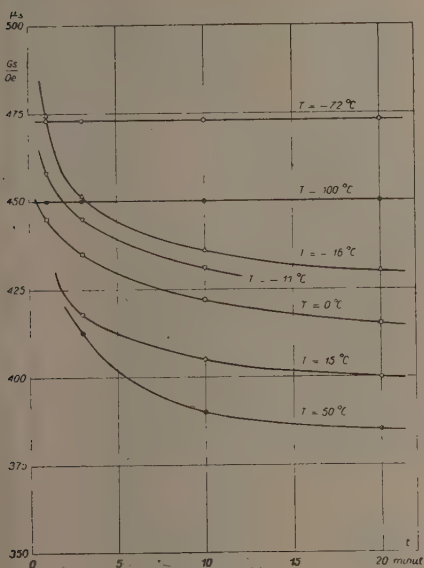
Rys. 1



Rys. 2

stu temperatury czas ustalania jest krótszy jak również mniejsze są różnice przenikalności. W temperaturze około 100°C zjawisko dezakomodacji praktycznie zanika. W temperaturach różnych od 25°C czas ustalania się oraz różnice przenikalności maleją w miarę podwyższania lub obniżania się temperatury. Z pomiarów tych wynika, że czas ustalania się przenikalności, określony przez spadek różnicy przenikalności do około 1% w wartości ustalonej, jest rzędu 1500 minut (25 godzin), przy czym spada do kilkuset minut w temperaturach 0 i 50°C. W celu sprawdzenia czy zjawisko startu krzywych przenikalności dla temperatur niższych od 0°C z poziomów przenikalności wyższych od poziomu dla 100°C nie jest wywołane starzeniem się materiału przy pomiarach w temperaturze 100°C, wykonano dodatkowe pomiary w szerszym zakresie temperatur, poczynając od 100°C

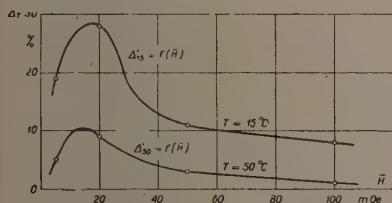
w dół. Wyniki tych pomiarów, przedstawione na rys. 3, potwierdzają to zjawisko.



Rys. 3

Przedstawione wyniki pomiarów dość dobrze spełniają równania wykładnicze Webba i Forda [6] w postaci:

$$\Delta = \frac{\mu - \mu_{\infty}}{\mu_{\infty}} 100\% = K e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

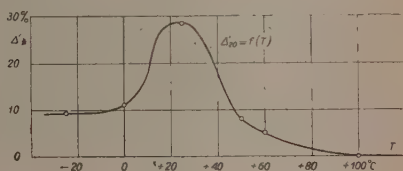


Rys. 4

przy wykładniku $n=0,25$ z dokładnością około 1%. Największe wartości przyrostu przenikalności Δ' określone dla przenikalności μ' mierzonej po jednej minucie od chwili zakończenia rozmagnesowania występują (rys. 4) przy natężeniach pól

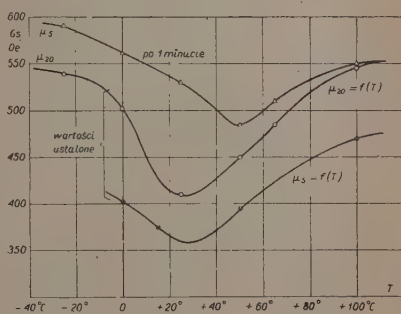
kilkunastu mOe. Przy temperaturze 25°C należy spodziewać się przyrostów przenikalności Δ' rzędu 30%. Większe wartości przyrostów przenikalności (rzędu 50%) występują, gdy przyrosty te będziemy obliczać dla przenikalności μ^0 wyznaczonej ze wzoru (1) dla chwili bezpośrednio po rozmagnesowaniu. Wartości te nie mają jednak praktycznego znaczenia.

„Minutowe” przyrosty przenikalności Δ' wykazują największą wartość rzędu 30% przy temperaturze około 25°C (rys. 5).



Rys. 5

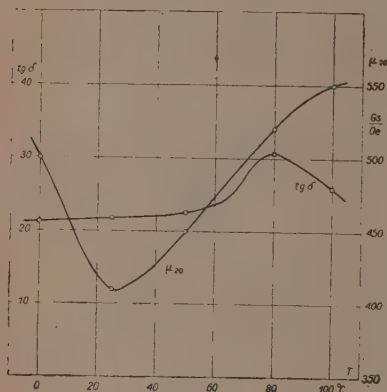
Przebiegi przenikalności w słabych polach w zależności od temperatury, mierzone w czasie ustalonym, wykazują (rys. 6) charakterystyczne dla opóźnienia magnetycznego minimum [5], które występuje przy temperaturze około 25°C,



Rys. 6

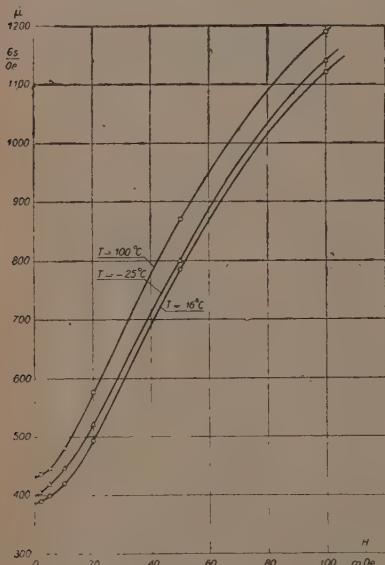
przy której najwyraźniej występuje zjawisko dezakomodacji. Minimum to przesuwają się w stronę wyższych temperatur (50°C) dla pomiarów wykonanych bezpośrednio po rozmagnesowaniu. Należy również dodać, że — zgodnie z literaturą [4] — maksimum współczynnika

stratności ($\operatorname{tg} \delta$) występuje na wzrastającej części krzywej przenikalności (rys. 7).



Rys. 7

Na koniec (rys. 8) podane są wartości przenikalności w zależności od natężenia pola dla różnych temperatur po odpoczynku 24 godzinny.

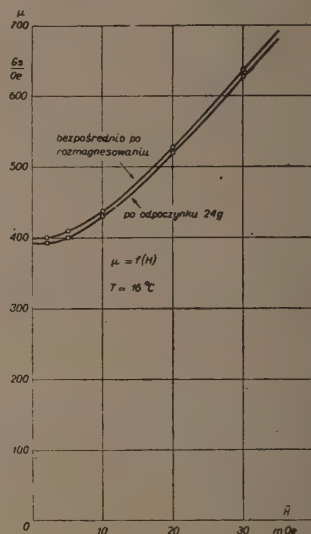


Rys. 8

zbytku 24 godzinny. Stosunkowo płaski przebieg w pobliżu zera natężenia pola

jest również charakterystyczny dla dezakomodacji [1], jak to również wynika z wykresów $\mu = f(\bar{H})$ (rys. 9).

Z pomiarów powyższych można wysnuć następujące wnioski: dezakomodacja występuje wyraźnie w rdzeniach wyciętych ze stali krzemowych, które przeważnie stosowane są w telekomunikacji. Największe wartości osiąga ona w temperaturach pokojowych i przy natężeniach pól rzędu 20 mOe, czyli w warunkach normalnych pomiarów technicz-



Rys. 9

nych. Przyrosty przenikalności występujące w omawianych stalach krzemowych produkcji krajowej są w tych warunkach rzędu 30% wartości ustalonych i praktycznie zanikają w czasie doby usprawniając stosowaną w normach przerwę czasową tej wartości między rozmagnesowaniem a pomiarami.

3. Próby wytłumaczenia zjawiska dezakomodacji. Współczesna teoria ferromagnetyzmu wyjaśnia zjawisko dezakomodacji dyfuzją zanieczyszczeń (węgiel lub azot) w siatce krystalicznej ferromagnetyka [7]. Ściany domen magnetycznych tworzą się na

nieprawidłowościach siatki krystalicznej, gdyż tam energie tworzenia się ścian są najmniejsze. Ze względu na licznie występujące defekty siatki, miejsca tworzenia się ścian nie są jednoznacznie określone. Po namagnesowaniu materiału aż do nasycenia, czyli do stanu, w którym zanikają granice między domenami w kryształach i po rozmagnesowaniu go do zera, ściany domen tworzą na ogół w nieco innych położeniach niż w poprzednim stanie rozmagnesowania.

Przy tworzeniu się ścian domen o grubości kilkuset atomów wytwarza się w miejscu tworzenia się ściany dół energii potencjalnej związany z dużymi gradientami naprężeń wywołującymi dyfuzję zanieczyszczeń do środka ściany [2].

Ten proces powolnej dyfuzji do środka ściany pogłębia dół jej energii potencjalnej zmniejszając przenikalność materiału oraz zwiększając napięcie pola potrzebne do wywołania pierwszych skoków nieodwracalnych domen, czego rezultatem jest zwężenie pętli histerezy w środku oraz charakterystyczne zagięcie krzywych $\mu = f(H)$ w bardzo słabych

polach (rys. 9). Omawiane zjawisko zanika na ogół po usunięciu zanieczyszczeń drogą na przykład rafinacji materiału i powraca po powtórnym wprowadzeniu zanieczyszczeń. Badane stale krzemowe są jednak wyjątkiem od tej reguły [3], gdyż rafinacyjna ich obróbka termiczna nie wywołuje zaniku dezakomodacji i dlatego skłania do dalszych prac nad tym najważniejszym materiałem magnetycznym z praktycznego punktu widzenia.

Literatura

1. Feldkeller R., Sorger R. — Magnetische Nachwirkungen der Anfangspermeabilität und der Barkhausensprünge. A.E.U. nr 2, 1953, s. 79.
2. Gorskiy. — Sow. Phys. 1935, s. 457.
3. Janus, Drożżina. — Z. T. F. 1939, s. 1960.
4. Smoliński A. — Uzyskiwanie rdzeni transformatorowych o specjalnych właściwościach ze stali krzemowej. Arch. Elektrot. nr 3—4, 1953, s. 205.
5. Snoek J. L. — Time effects in magnetisation. Physica nr 8, 1938, s. 663.
6. Webb C. E., Ford L. H. — The time-decrease of permeability at low magnetising forces. J. I. E. E. 1934, s. 787.
7. Wonsowski S. — Sowremiennoje uczenie o magnetizmie. 1953, s. 377.

621.318.22:621.318.32

FERRYTY O PROSTOKĄTNEJ PĘTLI HISTEREZY

A. BRAGIŃSKI

Opisano sposób wytwarzania ferrytu Mn-Mg o prostokątnej pętli histerezy i podano uzyskane wyniki. Stosunek B_r/B_s dla podanych próbek wyniósł około 0,8. Natrafiono na trudności uzyskania zadowalającego kompromisu między warunkami koniecznymi dla uzyskania dużej anizotropii magnetokrystalicznej i zupełnego przereagowania ferrytu.

ФЕРРИТЫ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕТЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА

Резюме

Описан способ приготовления феррита Mn-Mg с прямоугольной петлей гистерезиса и поданы полученные результаты. Отношение B_r/B_s для испытываемых образцов было около 0,8. Встречены затруднения в удовлетворительном согласовании условия значительной магнитно-кристаллической анизотропии и полного отреагирования феррита.

FERRITES WITH A RECTANGULAR HYSTERESIS LOOP

Summary

The method of obtaining a Mn-Mg ferrite with a rectangular hysteresis loop is described and the obtained results are quoted. The ratio B_r/B_s for the investigated specimens amounted to about 0,8. Some difficulties arose in obtaining a satisfactory compromise between the conditions necessary for getting a considerable magnetocrystalline anisotropy and a complete ferrit reaction.

1. Wstęp. Celem pracy jest otrzymanie tworzyw i rdzeni ferrytowych o prostokątnej pętli histerezy, stosowanych na przykład w statycznej magnetycznej pamięci matrycowej i układach przełączających [3], [4]. Niniejszy komunikat podsumowuje pierwszy etap pracy.

2. Pomiary. Ferryty o prostokątnej pętli histerezy badane są zazwyczaj dynamicznie w układach impulsowych odzwierciedlających do pewnego stopnia rzeczywiste warunki pracy rdzenia [3]. W pierwszym jednak etapie pracy ograniczono się w zasadzie do statycznych po-

Tablica 1

Porównanie własności próbek wolno i szybko studzonych

Rodzaj studzenia	Ozn. próbki	Własności magnatyczne				Struktura	Obróbka cieplna
		B_{s40} Gs	B_r/B_{s40}	H_{c40} Oe	μ_{10} Gs/Oe		
Wolno studzone z piecem	P81-4	1840	0,78	3,4	155	zwarta nieporowata	1300 °C
	P81-5	2100	0,73	4,1	146		
Wyjęte z pieca przy temperaturze wypału, studzone na powietrzu	P82-2	1810	0,75	3,7	146	zwarta nieporowata	4 godz.
	P82-3	1840	0,70	4,1	132		

miarów pętli histerezy. Określano wartość H_c , B_s (przy natężeniu pola $H_{\max} = 40$ Oe), B_r oraz wartość przenikalności początkowej i maksymalnej. Jako współczynnik określający prostokątność pętli przyjęto stosunek:

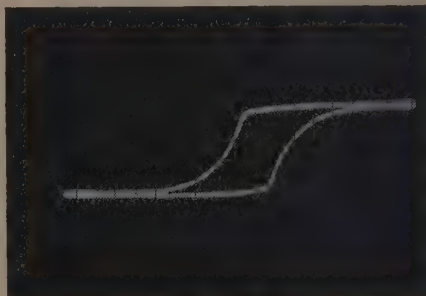
$$\frac{B \left(\frac{-H_c}{2} \right)}{B_s}$$

Poza tym dokonywano oscyloskopowych oględzin dynamicznej pętli histerezy przy 50 Hz.

Do pomiarów stosowano próbki pierścieniowe o przekroju prostokątnym i rozmiarach: $\varnothing z = 16-30$ mm, $\varnothing w = 12-20$ mm, $h = 4-10$ mm.

3. Zastosowane surowce. Wytwarzano roztwór stały MgO i $MnFe_2O_4$, opisany przez Hegyi'ego [2]. Skład molarowy wynosił od 0,0 MgO. $MnFe_2O_4$ do 0,45 MgO. $MnFe_2O_4$. Jako surowce zastosowano tlenki techniczne: Fe_2O_3 (97,8% czystego Fe_2O_3), MgO (88,1% czystego MgO) oraz węglan manganu $MnCO_3$ o zawartości

~ 43,9% Mn. Użycie dwutlenku manganu MnO_2 o czystości technicznej prowadziło do wyników gorszych: natężenie powściągające H_c było w tym przypadku



Rys. 1

prawie dwukrotnie większe (tabl. 2). Ogólnie biorąc, im czystsze i aktywniejsze chemicznie surowce wprowadzano, tym lepsze otrzymywano wyniki.

4. Wytwarzanie. Sprasowaną mieszaninę tlenków i węglanu Mn spiekano

w piecu sylitowym z atmosferą powietrzną. Obecność MgO w roztworze stałym zapewniała powstanie dobrze przereagowanej, zwartej struktury, tak że powolne studzenie próbek w powietrzu nie powodowało utleniania się ferrytu manganowego (tabl. 1).

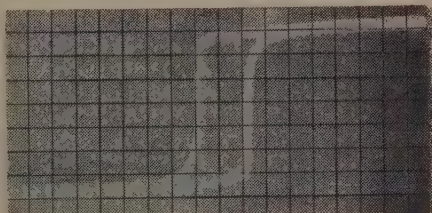
Spiekano przeprowadzano przy temperaturach 1200—1350°C zapewniających możliwie zupełne przereagowanie ferrytu w czasie 2—6 godzin.

Jak wiadomo [5], prostokątność pętli histerezy jest tym większa, im większy jest stosunek anizotropii magnetokrystalicznej materiału do energii anizotropii naprężeń i postaci.

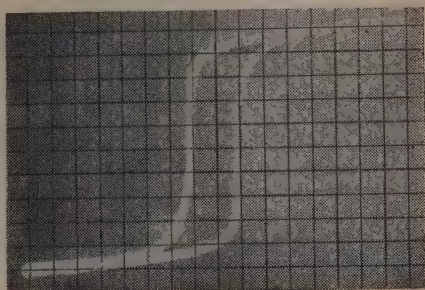
Temperatura spiekania zastosowana dla uzyskania małej przenikalności początkowej, a więc i większych wartości anizotropii krystalicznej, była na ogół niedostateczna dla pełnego przereagowania ferrytu. Na odwrót, przy zupełnym przereagowaniu przenikalność początkowa była zbyt duża i nie osiągnano wymaganej prostokątności pętli. Zależnie od doboru temperatury spiekania i aktywności surowców otrzymywano 2 rodzaje próbek, własności których zestawiono w tablicy 2.

Własności grupy 2 są lepiej powtarzalne niż własności grupy 1.

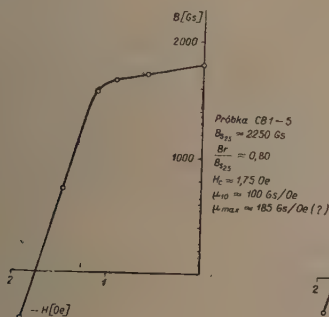
Dynamiczną pętlą histerezy (50 Hz) dla niezupełnie przereagowanej próbki grupy 1 przedstawia rys. 1 ($\mu_{10} = 50$ Gs(Oe)). Na rys. 2 i 3 podano dynamiczne pętle histerezy



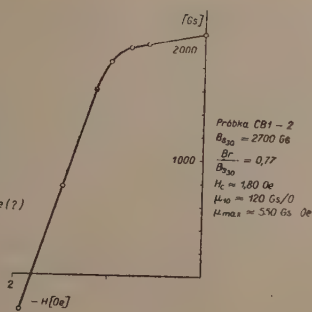
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



rezy dla próbek grupy 2 spiekanych odpowiednio w 1200 i 1300°C, statyczne zaś krzywe odmagnesowania dla typowych próbek grupy 2 przedstawiono na rys. 4. Zestawienie własności próbek grupy 2 i własności materiałów zagranicznych podano w tablicy 3.

5. Wnioski. 1. Zbyt duża, w porównaniu z odpowiednimi wartościami dla próbek zagranicznych, przenikalność początkowa próbek wytworzonych świadczy o konieczności zwiększenia anizotropii krystalicznej w celu uzyskania bardziej prostokątnej pętli histerezy.

Tablica 2

Zestawienie własności otrzymywanych próbek

Dane technologiczne	Parametr	Grupa 1	Grupa 2	
	Zastosowany związek manganu	MnO ₂ techniczny	MnCO ₃ gatunek „s”	MnCO ₃ gatunek „s”
	Temperatura spiekania °C	1200	1200	1300
	Czas spiekania godz.	4	4	4
Własności magnetyczne	μ_{10} Gs/Oe	40—80	100—160	150
	μ_{max} Gs/Oe	100—250	300—600	400—800
	B_s Gs	1700—2000	2000—2500	2500—2800
	przy H_{max} Oe	40	40	40
	B_r Gs	1200—1700	1500—2050	1750—2100
	B_r/B_s	0,70—0,85	0,75—0,82	0,70—0,76
	H_c Oe	3—4	1,2—2,0	1,0—1,5
	$B\left(\frac{-H_c}{2}\right)$ B_s	0,65—0,75	0,60—0,75	0,50—0,70

Tablica 3

Porównanie próbek grupy 2 i próbek zagranicznych

Parametr magnetyczny	Srednie własności optymalnych próbek grupy 2	Własności materiału MF-1118 General Ceramics	Własności próbek RCA 0,33 MgO MnFe ₂ O ₄	Własności próbek „Philips” MgO—MnFe ₂ O ₄
μ_p Gs/Oe	100—160	40	80	55
μ_{max} Gs/Oe	300—600	515		
B_s	2000—2050	1780	2800	
przy H_{max} Oe	40			
B_r Gs	1500—2500	1590	2450	
B_r/B_s	0,75—0,82	0,9 *	0,87	0,75
H_c Oe	1,2—2,0	1,5	1,5	
T_c °C	300	300	300	300

* Nowy materiał Gen. Ceramics MF-1374 wykazuje: $\frac{B_r}{B_u} = 0,96$.

2. Otrzymane własności umożliwiają praktyczne zastosowanie materiału, w związku z czym konieczne jest przeprowadzenie badań dynamicznych za pomocą normalnie stosowanych metod.

Dalsze prace mające na celu zwiększenie prostokątności pętli histerezy oraz wykorzystanie rdzeni do konstrukcji urządzeń są obecnie w toku.

Literatura

1. Albers-Schoenberg E. — Ferrites for microwave circuits and computers. J. Appl. Phys. nr 25, 1954, s. 152.

2. Hegyi I. J. — Ferromagnetic spinels with rectangular hysteresis loops. J. Appl. Phys. nr 25, 1954, s. 176.
3. Rajchman J. A. — A myriabit magnetic-core matrix memory. PIRE nr 41, 1953, s. 1407.
4. An Wang. — Magnetic triggers. PIRE nr 38, 1950, s. 626.
5. Wijn H. P. J., Gorter E. W., Geldermans P. — Conditions for square hysteresis loops in ferrites. Philips Techn. Rev. nr 16, 1954, s. 49.

621.318.22:621.318.32

BADANIA WPŁYWU AKTYWACJI Fe_2O_3 NA WŁASNOŚCI MAGNETYCZNE FERRYTÓW

R. KRZYSZOWSKA

W związku z ekonomicznością metody otrzymywania ferrytów na drodze spiekania tlenków metali dwuwartościowych i tlenku żelaza, wyłoniło się zagadnienie zwiększenia aktywności spiekanych surowców. Ponieważ głównym składnikiem wszystkich ferrytów jest Fe_2O_3 , wykonano szereg badań nad podwyższeniem stopnia aktywności rżu polerskiego (zawartość 97,8% Fe_2O_3) stosowanego do syntezy. Aktywację rżu polerskiego osiąga się przez wyżarzenie w podwyższonej temperaturze. Aktywność Fe_2O_3 określano dla ferrytów manganowych i manganowych badając ich własności magnetyczne.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АКТИВИЗАЦИИ Fe_2O_3 НА МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРИТОВ

Резюме

В связи с экономичностью метода получения ферритов путем спекания окисей двухвалентных металлов с окисью железа, возник вопрос повышения активности спекаемого сырья. Так как основным компонентом всех ферритов является Fe_2O_3 , произведено ряд исследований с целью увеличения степени активности полировального порошка (красной окиси железа, с содержанием 97,8% Fe_2O_3), применяемого к синтезу. Активизация полировального порошка получается прокаливанием в повышенной температуре. Активность для марганцевых и магниевых ферритов определялась с исследованием их магнитных свойств.

RESEARCH ON INFLUENCE OF THE ACTIVATION OF Fe_2O_3 ON MAGNETIC PROPERTIES OF FERRITES

Summary

Owing to economy of the ferrite production by sintering of bivalent metal oxides with ferric oxide there arose the problem of increasing the activity of the sintered raw materials.

As the principal component in all ferrites is Fe_2O_3 , investigations have been undertaken to increase the degree of activity of the rouge (polishing powder containing 97,8% of Fe_2O_3) which is used for the synthesis.

The activation of the said powder is reached by heating it at high temperature. The activity of Fe_2O_3 was determined for Mn and Mg ferrites by investigating their magnetic properties.

1. Wstęp. Ferryty metali dwuwartościowych o ogólnym wzorze $\text{MeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, stosowane jako tworzywa na materiały

magnetyczne, można otrzymać kilkoma metodami. Najważniejsze z nich to:

1. gotowanie strąconych za pomocą

ługu sodowego soli żelaza i soli metali dwuwartościowych,

2. stapianie tlenków metali dwuwartościowych i tlenku żelaza,
3. spiekanie tlenków uzyskanych przez rozkład termiczny soli żelaza i metali dwuwartościowych (siarczany, szczawiany, mrówczań, węglany),
4. spiekanie bezpośrednie tlenków żelaza i metali dwuwartościowych.

W skali przemysłowej stosowanie tlenków jest najekonomiczniejsze, ponieważ tlenki są stosunkowo najtańszym surowcem i prawie w całości wchodzi w reakcję tworzenia ferrytów, przy czym nie ma ubocznych produktów jak np. w przypadku otrzymywania ferrytów przez rozkład soli. Wadą metody jest wysoka temperatura spiekania. Dla obniżenia jej należy stosować surowce możliwe aktywne. Fe_2O_3 jest podstawowym składnikiem ferrytów, więc problem jego uaktywnienia posiada znaczenie zasadnicze.

Według Snoeka, uaktywnienie drobnoziarnistego Fe_2O_3 można osiągnąć przez odpowiednie żarzenie go w podwyższonej temperaturze (1100°C). Ponieważ nie ma w literaturze dokładniejszych danych dotyczących aktywacji, postanowiono zbadać wpływ aktywacji krajowego Fe_2O_3 na polepszenie własności ferrytów.

Stosunkowo łatwo dostępnym na rynku krajowym surowcem do wytwarzania ferrytów jest róż polerski; dlatego też został on obrany za przedmiot badania.

2. **Metodyka badań.** W celu wyjaśnienia procesu aktywacji tlenku żelaza przez żarzenie należało wykonać następujące badania Fe_2O_3 :

- a) porównać wyniki analizy chemicznej i rentgenograficznej surowego oraz żarzonego Fe_2O_3 ,
- b) określić wpływ temperatury, czasu i atmosfery żarzenia Fe_2O_3 na stopień jego aktywności, badając własności magnetyczne ferrytów, wytworzonych z odpowiednich próbek Fe_2O_3 ,
- c) określić, jakie obniżenie minimalnej temperatury zupełnego spiekania

ferrytu powoduje zastosowanie aktywowanego Fe_2O_3 ¹,

- d) zbadać stałość wyników aktywacji w czasie.

3. Część doświadczalna. Badanie wpływu aktywacji Fe_2O_3 przeprowadzono dla ferrytów manganowych i magnezowych, ponieważ są stosunkowo proste i względnie dobrze poznane. Za wskaźnik stopnia przereagowania ferrytu, a tym samym aktywności tlenku, uważano:

- a) dla niezupełnie spieczonych próbek — przenikalność magnetyczną skuteczną mierzoną w obwodzie zamkniętym i otwartym odpowiednio mostkiem rezonansowym lub miernikiem dobroci,
- b) dla zupełnie przereagowanych próbek — dobroć względną określoną miernikiem dobroci.

Róż polerski używany do otrzymywania ferrytów ma następujący skład chemiczny:

Fe_2O_3 — 97,81; Al_2O_3 — 0,77; SiO_2 — 0,04; zawartość wilgoci — 1,37.

Określenie ziarnistości przeprowadzono metodą mikroskopową oraz metodą Sabanina i stwierdzono ziarno wielkości kilku mikronów, o kształcie nieregularnym, dendrytycznym.

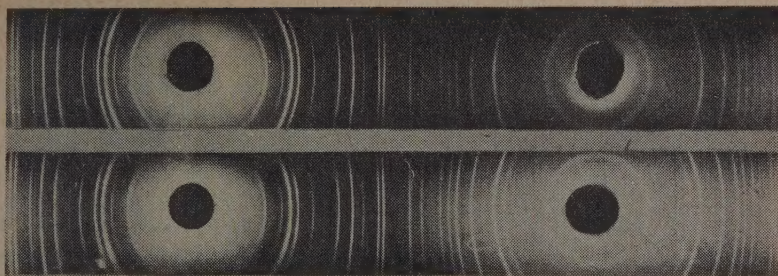
Analiza rentgenograficzna wykazała strukturę $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$.

Zastosowanie wyżej podanych metod badania pozwoliło dotychczas na uzyskanie następujących wyników:

- a) Analiza rentgenograficzna nie wykazuje widocznych zmian strukturalnych wywołanych żarzeniem $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$. Załączony rentgenogram² (rys. 1a) surowego $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ nie różni się od rentgenogramu (rys. 1b) przedstawiającego $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ żarzony przy 900°C przez 5 godz.

¹ Zupełne spiekanie ferrytu zachodzi przy temperaturze, powyżej której dalszy wzrost temperatury nie powoduje zwiększenia przenikalności ferrytu.

² Rentgenogramy zostały wykonane przez mgra J. Lampego.



Rys. 1 a i b

- b) Stwierdzono, że różnice w temperaturach żarzenia różu polerskiego nie mają zasadniczego wpływu na μ_{sk} i Q_{wzgl} ferrytów manganowych (tablica 1). Wpływu atmosfery żarzenia nie badano.
- c) Próbkę z ferrytu manganowego zawierającego żarzony Fe_2O_3 i spiekane przy temperaturze $1350^\circ C$ (tablica 1) posiadają przy zastosowaniu określonej technologii Q_{wzgl} wyższe o 10 do 50% w stosunku do

Tablica 1

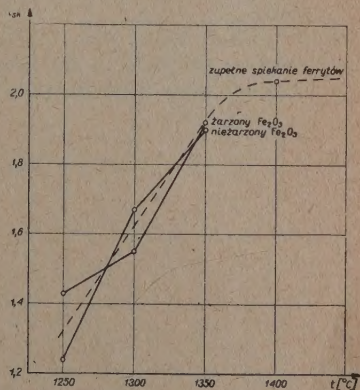
Wpływ temperatury żarzenia Fe_2O_3 na μ_{sk} i Q_{wzgl} ferrytów manganowych

Temp. żarz. Fe_2O_3 w $^\circ C$	Nieżarzony	$600^\circ C$	$700^\circ C$	$800^\circ C$	$900^\circ C$	$1000^\circ C$	$1100^\circ C$	Uwagi
μ_{sk}	2,00	2,00	1,96	2,00	2,00	—	2,10	Ferryty dwukrotnie spiekane z międzyoperacyjnym rozdrobnieniem
Q_{wzgl}	1,30	1,56	1,48	1,46	1,41	—	1,48	

próbek z Fe_2O_3 nieżarzonego i odznaczają się małym rozrzutem wyników. Świadczy to o większym stopniu przereagowania ferrytu, a tym samym o wyższej aktywności Fe_2O_3 .

- d) Badano μ_{sk} i Q_{wzgl} rdzeni cylindrycznych manganowych i magnezowych zawierających Fe_2O_3 surowy i żarzony przy temperaturze

$900^\circ C$ przez 5 godzin w zależności od temperatury spiekania ferrytów.



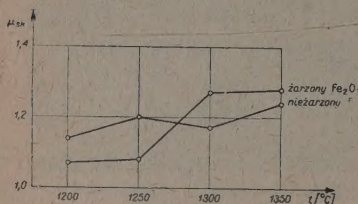
Rys. 2

Wyniki przedstawione wykreślnie na rys. 2 i 3 wykazują brak obniżenia

μ_{sk} — przenikalność skuteczna rdzenia, jest to stosunek indukcyjności własnej danej cewki z tym rdzeniem, do indukcyjności własnej cewki bez rdzenia, przy określonej częstotliwości, prądzie i wzajemnym ustawieniu rdzenia i cewki.

Q_{wzgl} — dobroć względna, jest to stosunek dobroci cewki z rdzeniem i bez rdzenia.

nia minimalnej temperatury zupełnego spiekania ferrytu manganowego i magnezowego w wyniku zastosowania aktywnego Fe_2O_3 , po-



Rys. 3

nieważ temperatura ta leżała powyżej zakresu temperatur możliwych do uzyskania. Na krzywej hipotetycznej zaznaczono punkt zupełnego spieczenia ferrytów.

- e) Tlenek żelaza żarzony pozostawiono przez pewien okres czasu przed dodaniem do mieszanki, to jest przeprowadzono tzw. starzenie Fe_2O_3 . W wyniku zbadania dobroci próbek stwierdzono, że aktywność Fe_2O_3 żarzonego zmniejsza się z czasem (tablica 2).

Tablica 2

Wpływ „starzenia” Fe_2O_3 na μ_{sk} i Q_{wzgl} rdzeni z ferrytów manganowych

Czas „starzenia” Fe_2O_3 w dniach	2	2	2	14	20	22	25	Uwagi
μ_{sk}	1,87	1,80	1,95	1,80	1,09	1,88	1,40	Ferryty dwukrotnie spiekane — z międzyopera- cyjnym rozdrobn.
Q_{wzgl}	1,44	1,40	1,50	1,38	0,90	1,25	1,00	

4. Wnioski.

- Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że aktywność Fe_2O_3 wzrasta po wyżarzeniu i maleje z upływem czasu.
- Aktywacja Fe_2O_3 przez wyżarzenie wpływa na polepszenie własności wytworzonych z tlenku ferrytów.

- Nie określono optymalnych parametrów aktywacji i nie wyjaśniono jej fizycznych podstaw. Jest to przedmiot dalszej pracy.

LITERATURA

- Snoek J. L. — New developments in ferromagnetic materials. Elsevier Pb. New York 1949.

ERRATA

Str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	od dołu	od góry		
216	wzór (1)		$F(x)=e^{-\delta^2 x}$	$F(x)=e^{-\delta x^2}$
221	wzór (27)		$S'_2 \cdot \hat{k}_1$	$S'_2 \cdot \hat{k}_{11}$
229	mianownik wzoru (59)		$b^2+p \dots$	$p^2+p \dots$
234	Tablica 3		Typ wzmacniacza $v_c =$	Typ wzmacniacza v
244	—	14	тиров	типов
269	11	—	$v)$	v
270	6	—	$\omega_0 = \frac{1}{LC}$	$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
310	(wzór 53)		$K'_w = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1-e^{K_w}}{\kappa}} \right]$	$K'_w = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1-e^{-K_w}}{\kappa}} \right]$
„	wzór (54)		$\Delta = K'_w - K_w =$ $= \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1-e^{K_w}}{\kappa}} \right] - K_w$	$\Delta = K'_w - K_w =$ $= \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1-e^{-K_w}}{\kappa}} \right] - K_w$
315	—	11	положительной обратной связи	положительной и отрицательной обратной связи
333	12	—	$k = \frac{L}{R_2^2 C}$	$k = \frac{L}{R_2^2 C_2}$
„	10	—	$D(p_1) = 1 - K_0(P_1) =$	$D(p_1) = 1 - K_0(p_1) =$
„	mianownik wzoru (38)		$2(a_2 + a + k)$	$2(a^2 + a + k)$
370	mianownik wzoru (13)		$\left(\frac{r_2}{r} \right)^{\sigma a} l^{\epsilon r \cdot r}$	$\left(\frac{r_2}{r} \right)^{\sigma a} l^{\cdot r}$
389	—	20	z krzywą e_θ	z krzywą e

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

w sprzedaży i prenumeracie

Poszczególne aktualne numery są do nabycia w następujących księgarniach Domu Książki:

Warszawa, ul. Krak.-Przedm. 7	Opole, ul. Ozimska 8
„ „ Bracka 20	Kraków, ul. Podwale 6
„ „ Piękna 31/39	„ Rynek 23
„ „ Kredytowa 10	„ Rynek 36
„ pl. Jedności Robot- niczej (Politechn.)	Poznań, ul. 27 Grudnia 23
Wrocław, ul. Skłodowskiej- Curie 39	Łódź, ul. Narutowicza 34
	Stalinogród, ul. Warszawska 11
	„ „ Młyńska 2

*

Pojedyncze numery oraz komplety roczników czasopism z lat ubiegłych można nabywać lub zamawiać w Przedsiębiorstwie Sprzedaży Archiwalnej „Ruch“, Warszawa, ul. Puławska 108 i ul. Wiejska 14.

*

Regularną i systematyczną dostawę czasopisma zapewnia prenumerata. Zamówienia i wpłaty na prenumeratę (rocznie zł 60.—, półrocznie zł 30.—) przyjmuje Centrala Kolportażu „Ruch“, Warszawa, ul. Srebrna 12. Konto PKO nr 1-6-100020